Corrigé du bac général 2025
Spécialité Mathématiques
Centres Etrangers Afrique – Jour 2

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Correction proposée par un enseignant en mathématiques pour le site
www.sujetdebac.fr

EXERCICE 1 (6 points)

Partie A

1. On utilise la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 6$ (en milliers d'individus) et de raison $q = 0{,}93$.

La population au 1er janvier 2026 est donc $u_1 = u_0 \times q = 6 \times 0{,}93 = 5{,}58$

La population est donc de 5580 individus.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n = 6 \times 0,93^n$

3. La suite $u_n = 6 \times 0,93^n$ est une suite géométrique de raison strictement comprise entre 0 et 1.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Dans le milieu A, la population diminue d'environ 7 % chaque année. À long terme, elle tend vers 0 : cela signifie que la population finira par disparaître dans ce milieu.

Partie B

1. On a :

$$v_0 = 6$$

$$v_1 = -0{,}05 \times v_0^2 + 1{,}1 \times v_0 = -0{,}05 \times 36 + 1{,}1 \times 6 = -1{,}8 + 6{,}6 = 4{,}8$$

La population au 1er janvier 2026 est donc de 4800 individus.

2. On considère la fonction $f(x) = -0{,}05x^2 + 1{,}1x$

Cette fonction est un polynôme du second degré. Son coefficient dominant est négatif ($-0{,}05$), donc sa courbe est une parabole tournée vers le bas.

Son sommet est en $x_s = \frac{-1{,}1}{2\times(-0{,}05)} = \frac{-1{,}1}{-0{,}1} = 11$

Donc f est croissante sur [0 ; 11].

3. Initialisation : $v_0 = 6$, donc $2 \leq v_1 \leq v_0$ (car on a vu que $v_1 = 4{,}8$)

Hérédité : On suppose que pour un certain n, on a $2 \leq v_n \leq 6$ On veut montrer que $2 \leq v_{n+1} \leq v_n$

On utilise la fonction $f(x) = -0{,}05x^2 + 1{,}1x$

Comme f est croissante sur [0 ; 11] et que $v_n \in [2; 6] \subset [0; 11]$, on a :

- $f(v_n) \leq f(6) = -0{,}05 \times 36 + 1{,}1 \times 6 = -1{,}8 + 6{,}6 = 4{,}8$
- $f(v_n) \geq f(2) = -0{,}05 \times 4 + 1{,}1 \times 2 = -0{,}2 + 2{,}2 = 2$

Donc $v_{n+1} = f(v_n) \in [2; 4{,}8] \subset [2; v_n]$

Conclusion : la propriété est héréditaire. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6$

4. La suite (v_n) est bornée inférieurement par 2 et décroissante à partir de $n = 0$. Donc, elle est convergente d'après le théorème de convergence des suites monotones.

5. a. Si $\ell = \lim v_n$, alors en passant à la limite dans la relation de récurrence :

$$\ell = \lim v_{n+1} = \lim f(v_n) = f(\ell)$$

Donc ℓ est une solution de $f(x) = x$

On résout $-0{,}05x^2 + 1{,}1x = x \Leftrightarrow -0{,}05x^2 + 0{,}1x = 0 \Leftrightarrow x(-0{,}05x + 0{,}1) = 0$

Solutions : $x = 0$ ou $x = 2$

Mais $v_n \geq 2$, donc $\ell = 2$.

5. b. Dans le milieu B, la population diminue au départ, puis se stabilise à long terme à 2000 individus.

Partie C

1. Dans le milieu A, la population est donnée par $u_n = 6 \times 0{,}93^n$

On cherche le plus petit n tel que $u_n < 3$

$\Leftrightarrow 6 \times 0{,}93^n < 3 \Leftrightarrow 0{,}93^n < 0{,}5$

On prend le logarithme : $n\ln(0{,}93) < \ln(0{,}5) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}93)} \approx \frac{-0{,}6931}{-0{,}07257} \approx 9{,}55$

Donc, à partir de $n = 10$, soit en 2035, la population du milieu A devient strictement inférieure à 3000 individus.

2. On utilise une calculatrice pour déterminer le premier n tel que $v_n < 3$.

En faisant les calculs (ou en utilisant la fonction récursive sur la calculatrice), on trouve :

À partir de l'année 2031 (soit $n = 6$), $v_n < 3$.

3. D'après les questions précédentes :

- La population dans A passe sous 3000 en 2035.
- Celle dans B passe sous 3000 en 2031, mais tend vers 2000 ensuite.

La suite (u_n) tend vers 0, et (v_n) tend vers 2. Donc à long terme, $v_n > u_n$.

Il existe donc un rang à partir duquel $v_n > u_n$, c'est-à-dire une année à partir de laquelle la population dans B dépasse celle dans A.

4. a. Programme complété :

```
n = 0
u = 0
v = 6
while u >= v :
    u = u * 0.93
    v = -0.05 * v**2 + 1.1 * v
    n = n + 1
print(2025 + n)
```

4. b. En exécutant ce programme, on trouve que la condition $v > u$ est remplie pour la première fois lorsque $n = 13$.

Donc l'année affichée est 2025 + 13 = 2038.

EXERCICE 2 (6 points)

Partie A

1. Par lecture graphique $f(10) \approx 0{,}85$.

2. Graphiquement, cela signifie que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

3. On a $f(0) = 0,5$

Donc $f(0) = \frac{1}{a+e^0} = \frac{1}{a+1} = 0,5$

On résout :

$$\frac{1}{a+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow a + 1 = 2 \Rightarrow a = 1$$

4. Les points A(0 ; 0,5) et B(10 ; 1) permettent de calculer le coefficient directeur de la droite (AB) :

$$m = \frac{1 - 0,5}{10 - 0} = \frac{0,5}{10} = 0,05$$

5. a. Posons $u(x) = 1 + e^{-bx}$, alors $f(x) = \frac{1}{u(x)}$

Donc par dérivation :

$$f'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2}$$

Or $u'(x) = -be^{-bx}$

Donc :

$$f'(x) = \frac{be^{-bx}}{(1 + e^{-bx})^2}$$

5. b. La droite (AB) est tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A, donc $f'(0) = 0,05$.

On remplace dans l'expression de $f'(x)$:

$$f'(0) = \frac{b \cdot 1}{(1+1)^2} = \frac{b}{4}$$

Donc :

$$\frac{b}{4} = 0,05 \Rightarrow b = 0,2$$

<u>Partie B</u>

1. On considère désormais $f(x) = \frac{1}{1+e^{-0,2x}}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{1+0} = 1$$

2. La dérivée de f est :

$$f'(x) = \frac{0{,}2e^{-0{,}2x}}{(1+e^{-0{,}2x})^2}$$

Le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs sur $[0; +\infty[$, donc $f'(x) > 0$.
Donc la fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

3. La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$, avec :

$$f(0) = \frac{1}{1+1} = 0{,}5 < 0{,}97$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 > 0{,}97$$

Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in [0; +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0{,}97$.

4. À l'aide de la calculatrice :

$$f(17) \approx 0{,}968$$

$$f(18) \approx 0{,}973$$

Donc : $\alpha \in [17; 18]$.

<u>Partie C</u>

1. On part de :

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-0{,}2x}}$$

On multiplie numérateur et dénominateur par $e^{0{,}2x}$:

$$f(x) = \frac{e^{0{,}2x}}{e^{0{,}2x}+1}$$

2. Soit $u(x) = 1 + e^{0{,}2x}$, alors $u'(x) = 0{,}2e^{0{,}2x}$

On reconnaît $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$, donc une primitive de f est :

$$F(x) = \frac{\ln(1+e^{0{,}2x})}{0{,}2} = 5\ln(1+e^{0{,}2x})$$

3. On utilise la primitive trouvée :

$$\int_0^{40} f\,(x)\,dx = 5\ln(1+e^{0,2\cdot 40}) - 5\ln(1+e^0)$$
$$= 5\,(\ln(1+e^8) - \ln(2))$$

Donc :

$$I = \frac{5}{40}(\ln(1+e^8) - \ln(2)) = \frac{\ln(1+e^8) - \ln(2)}{8}$$

Valeur approchée :

$$I \approx 0{,}913$$

EXERCICE 3 (4 points)

Partie A

1. Il y a 64 caractères possibles pour chaque position dans la séquence. Une séquence comporte 4 caractères, donc : $64^4 = 16\,777\,216$.

Il y a 16 777 216 séquences possibles.

2. Si les 4 caractères doivent être tous différents, on compte sans remise :

$$64 \times 63 \times 62 \times 61 = 15\,249\,024$$

3. a. Le nombre de caractères ne comportant pas la lettre A majuscule est 63 (car on enlève un caractère). Donc : $63^4 = 15\,752\,961$ séquences ne comportant pas de A majuscule.

3. b. Le nombre de séquences avec au moins une lettre A majuscule est : $64^4 - 63^4 = 16\,777\,216 - 15\,752\,961 = 1\,024\,255$.

3. c. On veut des séquences comportant exactement une fois la lettre A majuscule. On choisit :

- la position où placer le A majuscule : 4 choix

- les 3 autres caractères parmi les 63 restants (différents de A) : 63^3

Donc nombre de séquences : $4 \times 63^3 = 1\,000\,188$.

3. d. Pour avoir exactement deux fois la lettre A majuscule, on choisit :

- les 2 positions où placer les A : $\binom{4}{2} = 6$
- les 2 autres caractères parmi les 63 restants : 63^2

Donc nombre de séquences : $6 \times 63^2 = 23\,814$.

Partie B

1. La variable aléatoire X suit une loi binomiale, car on répète 250 fois une expérience de Bernoulli avec deux issues (bon ou mauvais caractère transmis) et que les expériences sont indépendantes.

Paramètres :

- $n = 250$
- $p = 0{,}01$

2. On cherche $P(X = 0)$, c'est-à-dire que aucun caractère n'est mal transmis :

$$P(X = 0) = (1 - p)^{250} = 0,99^{250} \approx 0{,}08$$

3. L'espérance est :

$$\mathbb{E}(X) = np = 250 \times 0{,}01 = 2{,}5$$

La loi est centrée autour de 2 ou 3 erreurs. 16 est une valeur très éloignée de cette moyenne. Donc $P(X > 16)$ est effectivement très faible, et l'affirmation peut être jugée raisonnable.

Partie C

On utilise les propriétés d'additivité de l'espérance et de la variance pour des variables indépendantes :

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_3) + \mathbb{E}(X_4) = 4 \times 250 \times 0{,}01 = 10$$

$$\mathrm{Var}(S) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + \mathrm{Var}(X_3) + \mathrm{Var}(X_4)$$

Or $\mathrm{Var}(X_i) = np(1 - p) = 250 \times 0{,}01 \times 0{,}99 = 2{,}475$

Donc :

$$\text{Var}(S) = 4 \times 2{,}475 = 9{,}9$$

EXERCICE 4 (4 points)

1. a. Calculons les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 1-0 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 3-0 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles. Donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

1. b. On vérifie que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en calculant les produits scalaires :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = (-3)(-1) + (1)(1) + (-1)(4) = 3 + 1 - 4 = 0$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = (-1)(-1) + (3)(1) + (-1)(4) = 1 + 3 - 4 = 0$$

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaire du plan (ABC), donc c'est un vecteur normal au plan (ABC).

1. c. Une équation cartésienne du plan (ABC) est de la forme :

$$-x + y + 4z + d = 0$$

On remplace par les coordonnées du point A(1 ; 0 ; 3) pour trouver d :

$$-1 + 0 + 4 \cdot 3 + d = 0 \Rightarrow -1 + 12 + d = 0 \Rightarrow d = -11$$

Donc une équation du plan (ABC) est :

$$-x + y + 4z - 11 = 0$$

2. a. Les vecteurs normaux des plans sont :

- $\vec{n}_P = (3; -3; 2)$
- $\vec{n}_{P'} = (1; -1; -1)$

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les plans P et P' sont sécants. Ils se coupent donc selon une droite, qu'on note (d).

2. b. On calcule le produit scalaire de leurs vecteurs normaux :

$$\vec{n}_P \cdot \vec{n}_{P'} = 3 \cdot 1 + (-3)(-1) + 2 \cdot (-1) = 3 + 3 - 2 = 4$$

Ce produit est non nul, donc les plans ne sont pas perpendiculaires.

3. On propose comme vecteur directeur de (d) : $\vec{u} = (1; 1; 0)$

Calcul des produits scalaires :

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{u} = 3 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 3 - 3 + 0 = 0$$

$$\vec{n}_2 \cdot \vec{u} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 1 - 1 + 0 = 0$$

Le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal aux deux vecteurs normaux, donc il est contenu dans les deux plans.

D'après le théorème du toit, un vecteur appartenant à deux plans est un vecteur directeur de leur droite d'intersection.

Donc le vecteur $\vec{u} = (1; 1; 0)$ est un vecteur directeur de la droite (d).

4. Pour P :

$$3 \cdot 2 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 9 = 6 - 3 + 6 - 9 = 0$$

Pour P' :

$$2 - 1 - 3 + 2 = 0$$

Le point M appartient bien aux deux plans, donc il appartient à leur droite d'intersection (d).

On connaît un point (M) et un vecteur directeur $\vec{u} = (1; 1; 0)$, donc une représentation paramétrique de la droite (d) est :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

5. On a déjà vu que le point M(2 ; 1 ; 3) appartient au plan (ABC). On vérifie maintenant que son vecteur directeur $\vec{u} = (1; 1; 0)$ est contenu dans ce plan.

On calcule le produit scalaire avec le vecteur normal du plan (ABC), qui est $\vec{n} = (-1; 1; 4)$:

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = (-1)(1) + (1)(1) + (4)(0) = -1 + 1 = 0$$

Le vecteur directeur de la droite (d) est orthogonal au vecteur normal du plan (ABC), donc la droite (d) est contenue dans le plan.

<u>Conclusion</u> **:** Les trois plans P, P' et (ABC) sont concourants, c'est-à-dire qu'ils se coupent tous les trois selon la même droite (d).