Corrigé du bac général 2025
Spécialité Mathématiques
Métropole Remplacement – Jour 1

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site sujetdebac.fr

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé maths au baccalauréat :
www.sujetdebac.fr/annales/specialites/spe-mathematiques/

EXERCICE 1 (5 points)

Partie A

1. On considère $u(t) = te^{-0,4t}$

On calcule sa dérivée (produit de deux fonctions) :

$$u'(t) = 1e^{-0,4t} + t(-0,4)e^{-0,4t} = (1 - 0,4t)e^{-0,4t}$$

Alors

$$u'(t) + 0,4u(t) = (1 - 0,4t)e^{-0,4t} + 0,4te^{-0,4t} = e^{-0,4t}$$

Donc u vérifie bien l'équation (E).

2.a. On définit une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, et $g(t) = f(t) - u(t)$.

On considère l'équation homogène associée :

$$(H) : \ y'(t) + 0,4y(t) = 0$$

On suppose que g est solution de (H), c'est-à-dire :

$$g'(t) + 0,4g(t) = 0$$

Or

$$g'(t) = f'(t) - u'(t)$$

donc

$$\begin{aligned} g'(t) + 0,4g(t) &= (f'(t) - u'(t)) + 0,4(f(t) - u(t)) \\ &= (f'(t) + 0,4f(t)) - (u'(t) + 0,4u(t)) \end{aligned}$$

Comme g est solution de (H), on a $g'(t) + 0,4g(t) = 0$, donc

$$(f'(t) + 0,4f(t)) - (u'(t) + 0,4u(t)) = 0$$

D'après la question 1, on sait que $u'(t) + 0,4u(t) = e^{-0,4t}$.

On obtient alors

$$f'(t) + 0,4f(t) = e^{-0,4t}$$

Donc f est solution de l'équation différentielle (E).

2.b. On résout l'équation différentielle (H) :

$$(H) : y'(t) + 0,4y(t) = 0 \Leftrightarrow y'(t) = -0,4\, y(t)$$

Les solutions de (H) sont donc les fonctions

$$t \mapsto \lambda e^{-0,4t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

2.c. D'après la question 2.a, si g est solution de (H), alors $f = g + u$ est solution de (E), et réciproquement (admis dans l'énoncé).

Les solutions de (H) étant $g(t) = \lambda e^{-0{,}4t}$, les solutions de (E) sont donc

$$f(t) = u(t) + \lambda e^{-0{,}4t} = te^{-0{,}4t} + \lambda e^{-0{,}4t} = (t + \lambda)e^{-0{,}4t}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

2.d. On cherche la solution particulière f telle que $f(0) = 1$.

On sait que

$$f(t) = (t + \lambda)e^{-0{,}4t}$$

En $t = 0$, on a

$$f(0) = (0 + \lambda)e^{0} = \lambda$$

La condition $f(0) = 1$ impose donc $\lambda = 1$.

Ainsi, la solution de (E) vérifiant $f(0) = 1$ est

$$f(t) = (t + 1)e^{-0{,}4t}$$

<u>Partie B</u>

1.a. On dérive $f(t) = (t + 1)e^{-0{,}4t}$ (produit) :

$$f'(t) = 1e^{-0{,}4t} + (t + 1)(-0{,}4)e^{-0{,}4t}$$

On factorise par $e^{-0{,}4t}$:

$$f'(t) = (1 - 0{,}4(t + 1))e^{-0{,}4t} = (1 - 0{,}4t - 0{,}4)e^{-0{,}4t} = (-0{,}4t + 0{,}6)e^{-0{,}4t}$$

Ce qui correspond bien à l'expression demandée :

$$f'(t) = (-0{,}4t + 0{,}6)e^{-0{,}4t}, \quad \text{pour tout } t \in [0; 6]$$

1.b. Sur $[0; 6]$, on a toujours$e^{-0{,}4t} > 0$. Le signe de $f'(t)$ est donc le signe de $-0{,}4t + 0{,}6$.

On résout :

$$-0{,}4t + 0{,}6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}4t = 0{,}6 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{0{,}6}{0{,}4} = 1{,}5$$

t	0		$1{,}5$		6
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	1	$\nearrow$	$2{,}5e^{-0{,}6}$	$\searrow$	$7e^{-2{,}4}$

On calcule les valeurs importantes :

$$f(0) = (0 + 1)e^{0} = 1$$

$$f(1{,}5) = (1{,}5 + 1)e^{-0{,}4\times 1{,}5} = 2{,}5e^{-0{,}6}$$

$$f(6) = (6 + 1)e^{-0{,}4\times 6} = 7e^{-2{,}4}$$

2.a. On sait que f est continue sur $[0; 6]$, car c'est un produit de fonctions continues.

On compare les valeurs de f avec 0,7 :

- $f(0) = 1 > 0{,}7$
- $f(1{,}5) \approx 1{,}37 > 0{,}7$
- $f(6) \approx 0{,}63 < 0{,}7$

Sur $[0; 1{,}5]$, f est croissante, mais toujours supérieure à 0,7 (puisqu'elle passe de 1 à ~1,37) : aucune solution dans cet intervalle.

Sur $[1{,}5; 6]$, f est décroissante et prend la valeur ~1,37 au début et ~0,63 à la fin. Comme

$f(1{,}5) > 0{,}7 > f(6)$ et f est continue et strictement décroissante sur $[1{,}5; 6]$, il existe une unique solution α dans $[1{,}5; 6]$ à l'équation $f(t) = 0{,}7$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires.

2.b. La personne est en hypoglycémie quand sa glycémie est strictement inférieure à 0,7 g·L^{-1}, c'est-à-dire pour $t > \alpha$, où α est la solution de :

$$f(t) = 0{,}7 \quad \Leftrightarrow \quad (t + 1)e^{-0{,}4t} = 0{,}7$$

À la calculatrice (résolution numérique), on trouve :

$$\alpha \approx 5{,}62 \text{ heures}$$

Passage en heures et minutes :

$$0{,}62 \times 60 \approx 37 \text{ minutes}$$

Donc la personne est en hypoglycémie environ 5 h 37 après la fin du repas (à la minute près).

3.a. On veut calculer :

$$\int_0^6 f(t)\,dt = \int_0^6 (t + 1)e^{-0{,}4t}\,dt$$

On fait une intégration par parties en posant :

$$\begin{cases} u(t) = t + 1 & \Rightarrow \quad u'(t) = 1 \\ v'(t) = e^{-0{,}4t} & \Rightarrow \quad v(t) = \dfrac{e^{-0{,}4t}}{-0{,}4} = -2{,}5e^{-0{,}4t} \end{cases}$$

Alors

$$\int_0^6 (t+1)e^{-0,4t}dt = [u(t)v(t)]_0^6 - \int_0^6 u'(t)v(t)\,dt$$

Calcul du terme de bord :

$$u(t)v(t) = (t+1)(-2{,}5e^{-0,4t})$$

$$[u(t)v(t)]_0^6 = (7)(-2{,}5e^{-2,4}) - (1)(-2{,}5e^{0}) = -17{,}5e^{-2,4} + 2{,}5 \quad (1)$$

Calcul de l'intégrale restante :

$$-\int_0^6 u'(t)v(t)dt = -\int_0^6 1 \times (-2{,}5e^{-0,4t})dt = 2{,}5\int_0^6 e^{-0,4t}\,dt$$

Or

$$\int_0^6 e^{-0,4t}\,dt = \left[\frac{e^{-0,4t}}{-0{,}4}\right]_0^6 = [-2{,}5e^{-0,4t}]_0^6 = -2{,}5e^{-2,4} + 2{,}5$$

Donc

$$2{,}5\int_0^6 e^{-0,4t}\,dt = 2{,}5(-2{,}5e^{-2,4} + 2{,}5) = -6{,}25e^{-2,4} + 6{,}25 \quad (2)$$

En additionnant (1) et (2) :

$$\int_0^6 (t+1)e^{-0,4t}dt = (-17{,}5e^{-2,4} + 2{,}5) + (-6{,}25e^{-2,4} + 6{,}25) = -23{,}75e^{-2,4} + 8{,}75$$

Ce qui correspond bien à l'égalité demandée :

$$\int_0^6 f(t)\,dt = -23{,}75e^{-2,4} + 8{,}75$$

3.b. La glycémie moyenne $\overline{G}$ sur l'intervalle $[0;6]$ est donnée par :

$$\overline{G} = \frac{1}{6}\int_0^6 f(t)\,dt = \frac{1}{6}(-23{,}75e^{-2,4} + 8{,}75)$$

Numériquement, on obtient

$$\overline{G} \approx 1{,}10\ \text{g}\cdot\text{L}^{-1}$$

3.c. On remarque que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) :

$$f'(t) + 0{,}4f(t) = e^{-0,4t}$$

En intégrant cette égalité sur $[0;6]$, on obtient :

$$\int_0^6 f'(t)dt + 0{,}4\int_0^6 f(t)dt = \int_0^6 e^{-0{,}4t}\,dt$$

Or

$$\int_0^6 f'(t)dt = f(6) - f(0)$$

Et on sait calculer $\int_0^6 e^{-0{,}4t}\,dt$ grâce à la question 3.a. On obtient alors une équation ne contenant plus qu'une inconnue $\int_0^6 f(t)dt$, que l'on résout algébriquement pour retrouver

$$\int_0^6 f(t)dt = -23{,}75e^{-2{,}4} + 8{,}75$$

On retrouve donc la même glycémie moyenne qu'en 3.b, mais sans refaire une intégration par parties sur tout f.

EXERCICE 2 (5 points)

Partie A

1. La droite (FG) est perpendiculaire au plan (ABF).

Or $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}$ par définition de M, donc le point M appartient au plan (ABF).

Ainsi, les droites (FG) et (FM) sont perpendiculaires.

2. La droite (AB) appartient au plan (ABG) et le point M appartient à la droite (AB).

Ainsi, le point M appartient au plan (ABG).

Par ailleurs, $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BG}$. Donc le point H appartient également au plan (ABG).

Conclusion : Les points A, M, G, H sont donc coplanaires.

Partie B

On travaille maintenant dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Les coordonnées des sommets utiles sont alors :

$$A(0,0,0),\ B(1,0,0),\ D(0,1,0),\ E(0,0,1)$$

$$C(1,1,0),\ F(1,0,1),\ G(1,1,1),\ H(0,1,1)$$

Comme $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}$, le point M est : $M(2,0,0)$.

1. On calcule les vecteurs :

$$\overrightarrow{GM} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 0-1 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 1-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour que $\overrightarrow{GM}$ et $\overrightarrow{AH}$ soient colinéaires, il faudrait un réel λ tel que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mais la première coordonnée donnerait $1 = 0 \times \lambda$, ce qui est impossible.

Donc $\overrightarrow{GM}$ et $\overrightarrow{AH}$ ne sont pas colinéaires.

2. a. Une représentation paramétrique d'une droite est obtenue en prenant un point de la droite et un vecteur directeur.

Pour la droite (GM), on peut prendre le point $G(1,1,1)$ et le vecteur directeur $\overrightarrow{GM} = (1,-1,-1)$.

Tout point $P(x,y,z)$ de (GM) s'écrit alors

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \\ z = 1-t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

Ce qui justifie la représentation paramétrique donnée.

2. b. Le point d'intersection N de (GM) et (AH) vérifie les deux systèmes en même temps :

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \\ z = 1-t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = k \\ z = k \end{cases}$$

On a donc $1 + t = 0 \iff t = -1$

Ainsi :

$$y = 1 - (-1) = 2$$

$$z = 1 - (-1) = 2$$

Donc $k = 2$.

Le point N a pour coordonnées : $N(0,2,2)$.

3. a. On considère les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$:

$$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ 0-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AN} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 2-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Le produit scalaire vaut :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 2 \times 0 + 0 \times 2 + 0 \times 2 = 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont donc perpendiculaires.

Ainsi, le triangle AMN est rectangle en A.

3. b. La longueur AM est :

$$AM = \sqrt{2^2 + 0^2 + 0^2} = 2$$

La longueur AN est :

$$AN = \sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

L'aire du triangle rectangle AMN est donc :

$$\mathcal{A}_{AMN} = \frac{1}{2} \times AM \times AN = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

4. a. La face $BCGF$ est un carré de sommets avec les coordonnées suivantes.

$$B(1,0,0),\ C(1,1,0),\ G(1,1,1),\ F(1,0,1)$$

Le centre J de cette face est le milieu de la diagonale $[BG]$:

$$J\left(\frac{1+1}{2}, \frac{0+1}{2}, \frac{0+1}{2}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

4. b. On a :

$$\overrightarrow{FJ} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1/2-0 \\ 1/2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Le plan (AMN) est engendré par les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$, non colinéaires.

Calculons les produits scalaires :

$$\overrightarrow{FJ} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \times 2 + 1/2 \times 0 + (-1/2) \times 0 = 0$$

$$\overrightarrow{FJ} \cdot \overrightarrow{AN} = 0 \times 0 + 1/2 \times 2 + (-1/2) \times 2 = 1 - 1 = 0$$

Donc $\overrightarrow{FJ}$ est perpendiculaire à la fois à $\overrightarrow{AM}$ et à $\overrightarrow{AN}$, deux directions du plan (AMN).

On en déduit que $\overrightarrow{FJ}$ est un vecteur normal au plan (AMN).

4. c. Le vecteur $\overrightarrow{AJ}$ vaut :

$$\overrightarrow{AJ} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1/2-0 \\ 1/2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

On cherche α, β tels que

$$\overrightarrow{AJ} = \alpha\overrightarrow{AM} + \beta\overrightarrow{AN}$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne le système :

$$\begin{cases} 2\alpha = 1 \\ 2\beta = 1/2 \\ 2\beta = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \quad \alpha = 1/2 \text{ et } \beta = 1/4$$

Donc

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AN}$$

Le vecteur $\overrightarrow{AJ}$ est combinaison linéaire de deux vecteurs du plan (AMN), donc le point J appartient au plan (AMN).

Comme J est à la fois dans le plan (AMN) et sur la droite passant par F selon la direction normale $\overrightarrow{FJ}$, c'est le pied de la perpendiculaire issue de F au plan (AMN).

Ainsi, J est le projeté orthogonal de F sur le plan (AMN).

5. Base du tétraèdre : triangle AMN d'aire $\mathcal{A}_{AMN} = 2\sqrt{2}$.

Hauteur du tétraèdre : distance de F au plan (AMN), c'est-à-dire la longueur FJ.

La norme de $\overrightarrow{FJ} = (0, 1/2, -1/2)$ est :

$$FJ = \sqrt{0^2 + (1/2)^2 + (-1/2)^2} = \sqrt{1/4 + 1/4} = \sqrt{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Donc le volume du tétraèdre est :

$$\mathcal{V}_{AMNF} = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$$

Base de la pyramide : carré $BCGF$. Son côté vaut 1 (arête du cube), donc :

$$\mathcal{A}_{BCGF} = 1 \times 1 = 1$$

Hauteur de la pyramide : distance de M au plan de la face $BCGF$.

La face $BCGF$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{AB}$, et M est sur la droite (AB) avec $BM = AB = 1$. La perpendiculaire issue de M à cette face tombe en B. La hauteur est donc

$$h = MB = 1$$

Ainsi, le volume de la pyramide est :

$$\mathcal{V}_{BCGFM} = \frac{1}{3} \times 1 \times 1 = \frac{1}{3}$$

Comparons les 2 volumes calculés.

$$\mathcal{V}_{AMNF} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_{BCGFM} = \frac{1}{3}$$

On obtient bien $\mathcal{V}_{AMNF} = 2\,\mathcal{V}_{BCGFM}$.

CQFD.

EXERCICE 3 (6 points)

Partie A

1. Pour tout $x \geq 2$, on a $3x - 2 > 0$, donc $f(x)$ est bien définie.

On dérive $f(x) = (3x-2)^{\frac{1}{2}}$, par dérivation en chaîne :

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}$$

Pour tout $x \geq 2$, le dénominateur $\sqrt{3x-2}$ est strictement positif, donc $f'(x) > 0$ sur $[2, +\infty[$. Ainsi, f est strictement croissante sur $[2, +\infty[$.

On calcule

$$f(2) = \sqrt{3 \times 2 - 2} = \sqrt{6-2} = \sqrt{4} = 2$$

Et quand $x \to +\infty$, on a $3x - 2 \to +\infty$, donc $\sqrt{3x-2} \to +\infty$.

C'est exactement le tableau donné.

2. a. On veut montrer par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6$$

<u>Initialisation (n = 0) :</u>

L'énoncé nous donne $u_0 = 6$

On calcule

$$u_1 = f(u_0) = f(6) = \sqrt{3 \times 6 - 2} = \sqrt{18 - 2} = \sqrt{16} = 4 < u_0$$

On a donc

$$2 \leq 4 \leq 6$$

Donc la propriété est vraie au rang 0.

<u>Hérédité</u> **:**

On suppose qu'au rang n on a

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6$$

On veut montrer :

$$2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 6$$

On sait d'après la question 1 que f est croissante sur $[2, +\infty[$. Par l'hypothèse de récurrence, u_{n+1} et u_n appartiennent à $[2,6]$, donc à l'intervalle où f est croissante.

On a alors

$$u_{n+2} = f(u_{n+1})$$

Et comme $2 \leq u_{n+1} \leq u_n$, par croissance de f :

$$f(2) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$$

C'est-à-dire

$$2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

De plus, l'hypothèse de récurrence donne déjà $u_{n+1} \leq 6$. Donc

$$2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 6$$

La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

<u>Conclusion :</u>

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6$$

2. b. La suite (u_n) est décroissante car $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n (d'après la question précédente).

De plus, $u_n \geq 2$ pour tout n, donc elle est minorée par 2.

Une suite décroissante et minorée est convergente : la suite (u_n) converge.

3. On admet que ℓ vérifie l'équation

$$f(x) = x$$

Donc

$$\ell = \sqrt{3\ell - 2}$$

$$\Leftrightarrow \ell^2 = 3\ell - 2$$

$$\Leftrightarrow \ell^2 - 3\ell + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\ell - 1)(\ell - 2) = 0$$

Les solutions sont $\ell = 1$ ou $\ell = 2$.

Mais tous les termes de la suite vérifient $u_n \geq 2$, donc la limite ne peut pas être 1.

Donc $\ell = 2$.

4. a. On a montré que (u_n) est décroissante et qu'elle converge vers 2.

On prend $a = 2{,}000001$ qui est strictement plus grand que 2. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2 < a$, il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$:

$$u_n < a$$

Donc au bout d'un certain nombre d'itérations, le test « while $u \geq a$ » devient faux, la boucle s'arrête et la fonction renvoie une valeur.

Ainsi, rang(2.000001) renvoie bien un résultat.

4. b. On sait que $u_n \geq 2$.

Si $a \leq 2$ la condition $u \geq a$ reste toujours vraie. La boucle ne s'arrête jamais et la fonction ne renvoie pas de résultat.

Si $a > 2$ on entre dans la boucle. La suite (u_n) est décroissante et converge vers 2, qui est strictement inférieur à a. Il existe donc un rang N tel que $u_N < a$. Au rang N, la condition $u \geq a$ devient fausse, la boucle s'arrête et la fonction renvoie une valeur.

Conclusion : l'instruction rang(a) renvoie un résultat pour tout réel $a > 2$ et ne termine pas pour $a \leq 2$.

Partie B

1. On calcule

$$v_1 = 3 - \frac{2}{v_0} = 3 - \frac{2}{6} = 3 - \frac{1}{3} = \frac{9}{3} - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

2. a. On calcule

$$v_{n+1} - 1 = \left(3 - \frac{2}{v_n}\right) - 1 = 2 - \frac{2}{v_n} \quad (1)$$

$$v_{n+1} - 2 = \left(3 - \frac{2}{v_n}\right) - 2 = 1 - \frac{2}{v_n} \quad (2)$$

On met ces expressions sur un dénominateur commun :

$$v_{n+1} - 1 = \frac{2v_n - 2}{v_n} = \frac{2(v_n - 1)}{v_n} \quad (1)$$

$$v_{n+1} - 2 = \frac{v_n - 2}{v_n} \quad (2)$$

Donc

$$w_{n+1} = \frac{(1)}{(2)} = \frac{\frac{2(v_n - 1)}{v_n}}{\frac{v_n - 2}{v_n}} = \frac{2(v_n - 1)}{v_n - 2} = 2\, w_n$$

La suite (w_n) vérifie donc $w_{n+1} = 2w_n$ pour tout n : c'est une suite géométrique de raison 2
Son premier terme est

$$w_0 = \frac{v_0 - 1}{v_0 - 2} = \frac{6 - 1}{6 - 2} = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

2. b. D'après la question précédente, pour tout n :

$$w_n = w_0 \times 2^n = 1{,}25 \times 2^n$$

Donc

$$w_n - 1 = 1{,}25 \times 2^n - 1$$

En utilisant l'égalité admise dans l'énoncé, on obtient

$$\frac{1}{v_n - 2} = 1{,}25 \times 2^n - 1$$

$$\Leftrightarrow v_n - 2 = \frac{1}{1{,}25 \times 2^n - 1}$$

$$\Leftrightarrow v_n = 2 + \frac{1}{1{,}25 \times 2^n - 1}$$

Ce qui correspond à la forme demandée.

2. c. Quand $n \to +\infty$, on a $2^n \to +\infty$, donc

$$1{,}25 \times 2^n - 1 \to +\infty$$

Et donc

$$\frac{1}{1{,}25 \times 2^n - 1} \to 0$$

Par conséquent

$$\lim_{n \to \infty} v_n = 2$$

3. En utilisant

$$v_n = 2 + \frac{1}{1{,}25 \times 2^n - 1}$$

l'inéquation deviant :

$$2 + \frac{1}{1{,}25 \times 2^n - 1} < 2{,}01$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1{,}25 \times 2^n - 1} < 0{,}01$$

$$\Leftrightarrow 1{,}25 \times 2^n - 1 > 100$$

$$\Leftrightarrow 1{,}25 \times 2^n > 101$$

$$\Leftrightarrow 2^n > 80{,}8$$

Par stricte croissance de la fonction ln sur $]0, +\infty[$:

$$\Leftrightarrow n \ln(2) > \ln(80{,}8)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln\ 80{,}8}{\ln 2} \text{ car } \ln 2 > 0$$

Or $\frac{\ln 80{,}8}{\ln 2} \approx 6{,}34$.

Donc le plus petit entier naturel n tel que $v_n < 2{,}01$ est $n = 7$.

Partie C

On a vu dans la partie B, que pour tout $n \geq 7$:

$$v_n \in]1{,}99; 2{,}01[$$

On calcule à l'aide de la calculatrice :

$$u_{14} \approx 2{,}021 > 2{,}01$$

$$u_{15} \approx 2{,}016 > 2{,}01$$

$$u_{16} \approx 2{,}012 > 2{,}01$$

$$u_{17} \approx 2{,}009 < 2{,}01$$

Et on sait que pour tout n, on a $u_n \geq 2$ donc $u_n > 1{,}99$.

Ainsi, pour tout $n \geq 17$, on a :

$$u_n \in]1{,}99; 2{,}01[$$

Par conséquent, on veut un entier N qui marche pour les deux suites en même temps, donc on prend

$$N = 17$$

EXERCICE 4 (4 points)

1. On doit compter les codes à 4 chiffres, tous distincts deux à deux, avec un premier chiffre non nul.

- Pour le premier chiffre : on a les chiffres de 1 à 9, donc 9 possibilités.
- Pour le deuxième chiffre : il reste 9 chiffres possibles (on a déjà utilisé un chiffre parmi les 10, mais le chiffre « 0 » est possible).
- Pour le troisième chiffre : il reste 8 possibilités.
- Pour le quatrième chiffre : il reste 7 possibilités.

Donc le nombre total de codes possibles est :

$$9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$$

L'Affirmation 1 est fausse.

2. On note :

- L : « billet acheté en ligne »
- G : « billet acheté au guichet » (complémentaire de L)
- A : « le visiteur prend l'audioguide »

Données :

$$P(A \mid L) = 0{,}8 \qquad P(L) = 0{,}7 \qquad P(\overline{A}) = 0{,}32$$

D'abord, comme L et G sont les deux seules possibilités :

$$P(G) = 1 - P(L) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$$

Ensuite :

$$P(A \cap L) = P(L) \times P(A \mid L) = 0{,}7 \times 0{,}8 = 0{,}56$$

On sait que $P(\overline{A}) = 0{,}32$, donc :

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}32 = 0{,}68$$

D'où :

$$P(A \cap G) = P(A) - P(A \cap L) = 0{,}68 - 0{,}56 = 0{,}12$$

On en déduit :

$$P(A \mid G) = \frac{P(A \cap G)}{P(G)} = \frac{0{,}12}{0{,}3} = 0{,}4$$

Donc :

$$P\left(\overline{A} \mid G\right) = 1 - P(A \mid G) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6 < \frac{2}{3}$$

<u>L'affirmation 2 est fausse.</u>

3. On note X le nombre de visiteurs, parmi les 12, qui prennent l'audioguide. Alors X suit une loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = P(A) = 0{,}68$.

La probabilité que exactement 6 visiteurs sur 12 prennent l'audioguide est :

$$P(X = 6) = \binom{12}{6} \times 0,68^6 \times\ 0,32^6$$

$$= 924 \times (0{,}68 \times 0{,}32)^6$$

$$= 924 \times 0{,}2176^6$$

<u>L'affirmation 3 est vraie.</u>

4. L'espérance de X vaut :

$$E(X) = 50 \times 0{,}1 + 80 \times 0{,}6 + 100 \times 0{,}3$$
$$= 5 + 48 + 30 = 83$$

L'espérance est donc de 83 minutes, et non 77 minutes.

L'affirmation 4 est fausse.

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé maths au baccalauréat :
www.sujetdebac.fr/annales/specialites/spe-mathematiques/