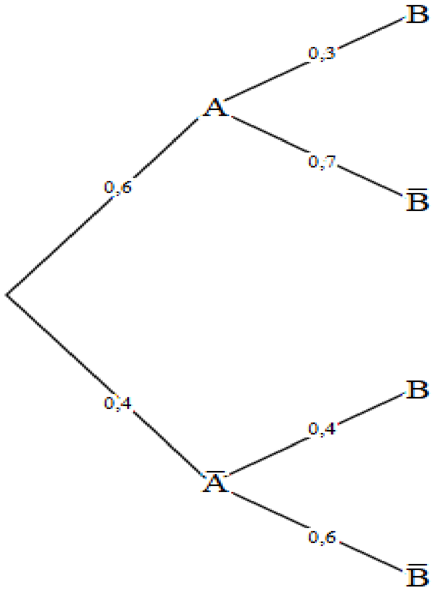
CORRIGE BAC

Année : 2025 **Matière :** Spé maths **Sujet :** Métropole 2

Exercice 1 :

Partie A :

1.



D'après l'énoncé, $P(A) = 0{,}6$, $P_A(B) = 0{,}3$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0{,}4$.
De plus, $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}6 \quad P(\bar{A}) = 0{,}4$.
$P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B) = 1 - 0{,}3 \quad P_A(\bar{B}) = 0{,}7$.
$P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 1 - P_{\bar{A}}(B) = 1 - 0{,}4 \quad P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0{,}6$.

2.

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P_{\bar{A}}(\bar{B})P(\bar{A})$ donc $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}6 \times 0{,}4 \quad P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}24$.
La probabilité pour que la personne ne tombe à aucune des deux séances est de 0,24.

3.

Les événements A et $\bar{A}$ forment un système complet d'événements (ou une partition de l'univers).
Donc, d'après la formule des probabilités totales, $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$.
Donc, $P(B) = P_A(B)P(A) + P_{\bar{A}}(B)P(\bar{A})$.
Ainsi, $P(B) = 0{,}3 \times 0{,}6 + 0{,}4 \times 0{,}4 \quad P(B) = 0{,}34$.

4.

On cherche $P_{\bar{B}}(\bar{A})$.
$P_{\bar{B}}(\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}\cap\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(\bar{A}\cap\bar{B})}{1-P(B)}$.
Donc, $P_{\bar{B}}(\bar{A}) = \frac{0{,}24}{1-0{,}34} \quad P_{\bar{B}}(\bar{A}) \approx 0{,}364$.
La probabilité pour que la personne ait chuté à la première séance sachant qu'elle n'a pas chuté à la deuxième séance est d'environ 0,364.

5.

a.

Choisir une personne est une épreuve de Bernoulli dont le succès est « la personne n'est tombée ni lors de la première séance ni lors de la deuxième séance » de probabilité 0,24.
On répète 100 fois cette épreuve de façon identique et indépendante (le choix des 100 personnes est assimilé à un tirage avec remise). On a donc un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}24$.
La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès (le nombre de personnes qui ne sont jamais tombées) suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(100\,;0{,}24)$.

b.

On cherche $P(X \geq 20)$.
$P(X \geq 20) = 1 - P(X < 20) = 1 - P(X \leq 19)$ car X est à valeurs entières.
D'après la calculatrice, $P(X \leq 19) \approx 0{,}145$.
Donc, $P(X \geq 20) \approx 1 - 0{,}145 \quad P(X \geq 20) \approx 0{,}855$.
La probabilité pour qu'au moins 20 personnes ne tombent à aucune des deux séances est d'environ 0,855.

c.

Comme X suit une loi binomiale, $E(X) = np$.
Donc, $E(X) = 100 \times 0{,}24$. $E(X) = 24$.
Ainsi, on peut espérer qu'en moyenne, 24 personnes ne tombent à aucune des deux séances.

Partie B :

1.

$E(T) = E(T_1 + T_2) = E(T_1) + E(T_2)$ par linéarité de l'espérance.
Donc, $E(T) = 40 + 60$ $E(T) = 100$.
Ainsi, une personne peut espérer attendre en moyenne 100 minutes (soit 1h40min) sur le week-end, c'est-à-dire en cumulant le temps d'attente du samedi et du dimanche.

2.

$V(T) = V(T_1 + T_2) = V(T_1) + V(T_2)$ car les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes.
Or, $\sigma(T_1) = \sqrt{V(T_1)}$ donc $V(T_1) = \sigma(T_1)^2$ et de même $V(T_2) = \sigma(T_2)^2$.
Ainsi, $V(T) = \sigma(T_1)^2 + \sigma(T_2)^2$.
Donc, $V(T) = 10^2 + 16^2$. $V(T) = 356$.

3.

On cherche à majorer $P(60 < T < 140)$.
$P(60 < T < 140) = P(-40 < T - 100 < 40)$ or $E(T) = 100$ donc $P(60 < T < 140) = P(-40 < T - E(T) < 40)$.
Donc, $P(60 < T < 140) = P(|T - E(T)| < 40) = 1 - P(|T - E(T)| \geq 40)$.
Or, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P(|T - E(T)| \geq 40) \leq \frac{V(T)}{40^2}$
Donc, $P(60 < T < 140) \geq 1 - \frac{V(T)}{40^2}$ car la fonction $x \mapsto 1 - x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ (fonction affine de coefficient directeur -1<0).
Donc, $P(60 < T < 140) \geq 1 - \frac{356}{40^2}$.
Ainsi, $P(60 < T < 140) \geq 0{,}7775 \geq 0{,}77$.
Donc, $P(60 < T < 140) \geq 0{,}77$.

Exercice 2 :

Partie A :

1.

Montrons que S appartient aux droites d et d'.

On cherche $t \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x_S = \frac{3}{2} + 2t \\ y_S = 2 + t \\ z_S = 3 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} = \frac{3}{2} + 2t \\ 1 = 2 + t \\ 4 = 3 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \\ t = -1 \end{cases}$. On trouve une solution donc le point S appartient à la droite d.

On cherche $s \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x_S = s \\ y_S = \frac{3}{2} + s \\ z_S = 3 - 2s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} = s \\ 1 = \frac{3}{2} + s \\ 4 = 3 - 2s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = -\frac{1}{2} \\ s = -\frac{1}{2} \\ s = -\frac{1}{2} \end{cases}$. On trouve une solution donc le point S appartient à la droite d'.

Ainsi, d et d' sont sécantes en S.

2.

a.

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\,;y_B - y_A\,;z_B - z_A) = (1+1\,;\,-1-2\,;2-1) = (2\,;\,-3\,;1)$.
$\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A\,;y_C - y_A\,;z_C - z_A) = (1+1\,;1-2\,;1-1) = (2\,;\,-1\,;0)$.
$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 1\times 2 + 2\times(-3) + 4\times 1 = 2-6+4 = 0$ donc $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$.
$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 1\times 2 + 2\times(-1) + 4\times 0 = 2-2 = 0$ donc $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AC}$.
Au passage, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc définissent bien le plan (ABC). Ainsi, $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs définissant le plan (ABC). Donc, il est bien normal au plan (ABC).

b.

On connaît un vecteur normal au plan (ABC). Ses coordonnées sont $(1\,;2\,;4)$. Donc, une équation cartésienne du plan (ABC) est $x+2y+4z+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$.
De plus, $C(1\,;1\,;1)$ appartient au plan (ABC) donc ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne ci-dessus.
Ainsi, $1+2+4+d=0$ donc $d=-7$.
Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc $x+2y+4z-7=0$.

c.

Montrons que S n'appartient pas au plan (ABC).
$x_S + 2y_S + 4z_S - 7 = -\frac{1}{2} + 2\times 1 + 4\times 4 - 7 = 10{,}5 \neq 0$ donc S n'appartient pas au plan (ABC).
Ainsi, les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

3.

a.

Montrons que $\overrightarrow{SH}$ est normal au plan (ABC) et que H appartient au plan (ABC).
$x_H + 2y_H + 4z_H - 7 = -1 + 2\times 0 + 4\times 2 - 7 = 0$ car H appartient au plan (ABC).
$\overrightarrow{SH} = (x_H - x_S\,;y_H - y_S\,;z_H - z_S) = \left(-1+\frac{1}{2}\,;0-1\,;2-4\right) = \left(-\frac{1}{2}\,;\,-1\,;-2\right) = -\frac{1}{2}\vec{n}$. Donc $\overrightarrow{SH}$ est colinéaire à $\vec{n}$ qui est normal au plan (ABC) d'après 2a. Donc, $\overrightarrow{SH}$ est normal au plan (ABC).
Ainsi, H est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC).

b.

On en déduit que la distance de S au plan (ABC) est $SH = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{\frac{21}{4}} = \frac{\sqrt{21}}{2}$.
Donc, la distance SM avec M dans le plan (ABC) est minimale lorsque $M = H$. Ainsi, pour tout point M du plan (ABC), $SM \geq SH$ donc $SM \geq \frac{\sqrt{21}}{2}$.
Ainsi, il n'existe aucun point M du plan (ABC) tel que $SM < \frac{\sqrt{21}}{2}$.

<u>Partie B :</u>

1.

$\overrightarrow{CS} = (x_S - x_C\,;y_S - y_C\,;z_S - z_C) = \left(-\frac{1}{2}-1\,;1-1\,;4-1\right) = \left(-\frac{3}{2}\,;0\,;3\right)$.
De plus, en posant $M(x\,;y\,;z)$, on a $\overrightarrow{CM} = (x-x_C\,;y-y_C\,;z-z_C) = (x-1\,;y-1\,;z-1)$.
Or, $\overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{CS} = \left(-\frac{3}{2}k\,;0\,;3k\right)$.

Donc, $\begin{cases} x-1 = -\frac{3}{2}k \\ y-1 = 0 \\ z-1 = 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1-\frac{3}{2}k \\ y = 1 \\ z = 3k+1 \end{cases}$.

Ainsi, on a $M\left(1-\frac{3}{2}k\;;1\,;3k+1\right)$.

2.

On cherche M tel que MAB soit rectangle en M, c'est-à-dire $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$.
$\overrightarrow{AM} = (x_M - x_A\,; y_M - y_A\,; z_M - z_A) = \left(2 - \frac{3}{2}k\,;\, -1\,; 3k\right)$.
$\overrightarrow{BM} = (x_M - x_B\,; y_M - y_B\,; z_M - z_B) = \left(-\frac{3}{2}k\,; 2\,; 3k - 1\right)$.
$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = \left(2 - \frac{3}{2}k\right)\left(-\frac{3}{2}k\right) - 1 \times 2 + 3k(3k-1) = -3k + \frac{9}{4}k^2 - 2 + 9k^2 - 3k = \frac{1}{4}(45k^2 - 24k - 8)$.
On cherche k tel que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(45k^2 - 24k - 8) = 0 \Leftrightarrow 45k^2 - 24k - 8 = 0$.
On a une équation du second degré.
Calcul du discriminant : $\Delta = 24^2 - 4 \times 45 \times (-8) = 2016$. $\Delta > 0$ donc il y a deux solutions.
Les deux solutions sont $k_1 = \frac{24+\sqrt{2016}}{90}$ et $k_2 = \frac{24-\sqrt{2016}}{90}$.
$k_1 \approx 0{,}76 \in [0\,; 1]$ donc l'équation admet (au moins) une solution dans $[0\,; 1]$.
Ainsi, il existe un point M du segment $[CS]$ tel que le triangle AMB est rectangle en M.

Exercice 3 :

Affirmation 1 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1+5^n}{2+3^n} = \frac{5^n\left(1+\frac{1}{5^n}\right)}{3^n\left(\frac{2}{3^n}+1\right)} = \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^n\left(1+\frac{1}{5^n}\right)}{\frac{2}{3^n}+1}$.
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{5^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$ or $0 < \frac{1}{5} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$
Par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{5^n}\right) = 1$.
De même, comme $0 < \frac{1}{3} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3^n} = 0$. Donc, par produit puis par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3^n} + 1\right) = 1$.
De plus, $\frac{5}{3} > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n = +\infty$. Par produit et quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Donc, <u>l'affirmation 1 est fausse.</u>

Affirmation 2 :

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, w_n \geq n$.
<u>Initialisation :</u> $w_0 = 0 \geq 0$ donc la propriété est vraie au rang $k = 0$.
<u>Hérédité :</u> Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que la propriété soit vraie. Montrons qu'elle est vraie au rang $k+1$.
D'après la relation de récurrence, $w_{k+1} = 3w_k - 2k + 3$.
Or, d'après l'hypothèse de récurrence, $w_k \geq k$ donc $3w_k \geq 3k$ (on multiplie par 3>0).
Donc, $3w_k - 2k + 3 \geq 3k - 2k + 3$ (on ajoute -2k+3).
Ainsi, $w_{k+1} \geq k + 3 \geq k + 1$ donc $w_{k+1} \geq k + 1$. La propriété est héréditaire.
<u>Conclusion :</u> La propriété est vraie au rang $k = 0$ et elle est héréditaire donc d'après le principe de récurrence, elle est vraie à tout rang.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, w_n \geq n$. <u>L'affirmation 2 est vraie</u>.

Affirmation 3 :

On remarque que T, la tangente à C_f au point d'abscisse 8 est au-dessus de C_f au voisinage de 8 donc f est concave au voisinage de 8.
Donc, f n'est pas convexe sur son ensemble de définition.
Ainsi, <u>l'affirmation 3 est fausse</u>.

Affirmation 4 :

Soit $g : x \mapsto \ln(x)$.
g est deux fois dérivable sur $]0\,; +\infty[$. Pour tout $x \in]0\,; +\infty[$, $g'(x) = \frac{1}{x}$ et $g''(x) = -\frac{1}{x^2}$.
Pour tout $x \in]0\,; +\infty[$, $g''(x) \leq 0$ donc g est concave sur $]0\,; +\infty[$.
Ainsi, la courbe de g est en-dessous de ses tangentes, et en particulier de sa tangente au point d'abscisse 1.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 à la courbe de g est $y = g'(1)(x-1) + g(1)$, qui se réécrit $y = 1(x-1) + \ln(1)$ soit $y = x - 1$.
Donc, pour tout $x > 0, g(x) \leq x - 1$ donc $\ln(x) \leq x - 1$
Ainsi, pour tout $x > 0, \ln(x) - x + 1 \leq 0$.
Donc, l'affirmation 4 est vraie.

Exercice 4 :

Partie A :

1.

Le chariot aura parcouru 15m au bout de 2 secondes.

2.

La longueur minimale à prévoir pour la zone de freinage est de 22,8m.

3.

$d'(4{,}7) = 1$. Ainsi la vitesse instantanée du chariot au bout de 4,7 secondes est de 1 m/s.

Partie B :

1.

a.

$(E') \Leftrightarrow y' = -0{,}6y$. Il s'agit d'une équation différentielle de la forme $y' = ay$ avec $a = -0{,}6$.
Les solutions sont donc les fonctions de la forme $t \mapsto Ae^{at}$, soit $t \mapsto Ae^{-0{,}6t}$ avec $A \in \mathbb{R}$.

b.

g est dérivable sur $[0\,;+\infty[$. Pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[, g'(t) = e^{-0{,}6t} - 0{,}6te^{-0{,}6t}$.
Pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[, g'(t) + 0{,}6g(t) = e^{-0{,}6t} - 0{,}6te^{-0{,}6t} + 0{,}6e^{-0{,}6t} = e^{-0{,}6t}$.
Ainsi, g est bien solution de l'équation différentielle (E).

c.

La question précédente permet de dire que $g : t \mapsto te^{-0{,}6t}$ est une solution particulière de (E) et on a résolu l'équation homogène associée à la question 1a.
Ainsi, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $t \mapsto Ae^{-0{,}6t} + te^{-0{,}6t}$ avec $A \in \mathbb{R}$.

d.

v est solution de (E) donc il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[, v(t) = Ae^{-0{,}6t} + te^{-0{,}6t}$
Or, $v(0) = 12$. D'autre part,$v(0) = Ae^0 + 0e^0 = A$. Ainsi, $A = 12$.
Donc, pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[, v(t) = 12e^{-0{,}6t} + te^{-0{,}6t}$
Pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[, v(t) = (12 + t)e^{-0{,}6t}$.

2.

a.

v est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables.
Pour tout $t \in [0\,;+\infty[, v'(t) = e^{-0{,}6t} - 0{,}6(12 + t)e^{-0{,}6t}$ par dérivation d'un produit.
Pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[, v'(t) = (1 - 0{,}6 \times 12 - 0{,}6t)e^{-0{,}6t}$.
Pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[, v'(t) = (-6{,}2 - 0{,}6t)e^{-0{,}6t}$.

b.

$\lim_{t \to +\infty} 0{,}6t = +\infty$, or $\lim_{X \to +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$ par croissance comparée.
Donc, par composition, $\lim_{t \to +\infty} \frac{0{,}6t}{e^{0{,}6t}} = 0$.
Donc, par produit, $\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{0{,}6} \times \frac{0{,}6t}{e^{0{,}6t}} = 0$

De plus, $\lim_{t\to+\infty} -0{,}6t = -\infty$. Or, $\lim_{X\to-\infty} e^X = 0$ donc par composition $\lim_{t\to+\infty} e^{-0{,}6t} = 0$.
Par produit, $\lim_{t\to+\infty} 12e^{-0{,}6t} = 0$
Par somme, $\lim_{t\to+\infty} v(t) = 0$.

c.

Pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[, e^{-0{,}6t} > 0$ donc la fonction v' est du même signe que la fonction $t \mapsto -6{,}2 - 0{,}6t$.
Pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[, -6{,}2 - 0{,}6t = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{6{,}2}{0{,}6} \Leftrightarrow t = -\frac{31}{3}$. Or, $-\frac{31}{3} < 0$.
Cette fonction est affine de coefficient directeur $-0{,}6 < 0$.
On a donc le tableau suivant :

t	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $-6{,}2 - 0{,}6t$	-
Signe de $v'(t)$	-
Variations de v	$12 \searrow 0$

d.

La fonction v est continue (car dérivable) et strictement (car v' ne s'annule pas sur $[0\,;\,+\infty[$) décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
$v(0) = 12$, $\lim_{t\to+\infty} v(t) = 0$ et $1 \in [0\,;12]$.
Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $v(t) = 1$ admet une unique solution α sur $[0\,;\,+\infty[$.
D'après la calculatrice, $v(4{,}69) \approx 1{,}0008 > 1$ et $v(4{,}7) \approx 0{,}9954 < 1$ donc $4{,}69 < \alpha < 4{,}7$.
Ainsi, $\alpha \approx 4{,}7$ au dixième.

3.

Comme la fonction v est décroissante $v(t) \leq 1 \Leftrightarrow t \geq \alpha$, donc le système mécanique se déclenche dès que $v(t) = 1$. D'après la question précédente, il se déclenche au bout de 4,7 secondes.

Partie C :

1.

On cherche à calculer $d(t) = \int_0^t (12 + x)e^{-0{,}6x}dx$.
Intégrons par parties.
On pose : $u'(x) = e^{-0{,}6x}$ et $v(x) = 12 + x$. Donc, on peut prendre $u(x) = -\frac{e^{-0{,}6x}}{0{,}6}$ et $v'(x) = 1$.
Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivée continue sur $[0\,;\,+\infty[$.
Donc, pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[$, elles le sont en particulier sur $[0\,;t]$.
Ainsi, pour tout $t \in [0;\,+\infty[, d(t) = \int_0^t u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_0^t - \int_0^t u(x)v'(x)dx$.
Pour tout $t \in [0\,;+\infty[, d(t) = \left[-\frac{(12+x)e^{-0{,}6x}}{0{,}6}\right]_0^t - \int_0^t -\frac{e^{-0{,}6x}}{0{,}6}dx$.

$$d(t) = -\frac{(12+t)e^{-0{,}6t}}{0{,}6} + \frac{12}{0{,}6} - \left[\frac{e^{-0{,}6x}}{0{,}6^2}\right]_0^t$$ car $x \mapsto \frac{e^{-0{,}6x}}{0{,}6^2}$ est une primitive de $x \mapsto -\frac{e^{-0{,}6x}}{0{,}6}$ sur $[0\,;t]$.

$$d(t) = -\frac{(12+t)e^{-0{,}6t}}{0{,}6} + \frac{12}{0{,}6} - \frac{e^{-0{,}6t}}{0{,}36} + \frac{1}{0{,}36}$$

Pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[$, $d(t) = e^{-0,6t}\left(-\frac{5}{3}t - \frac{205}{9}\right) + \frac{205}{9}$.

2.

On calcule $d(4,7)$ car d'après la question B3, le dispositif d'arrêt se déclenche au bout d'environ 4,7s.
$d(4,7) = e^{-0,6\times 4,7}\left(-\frac{5}{3}4,7 - \frac{205}{9}\right) + \frac{205}{9}$. $d(4,7) \approx 20,95$.
Ainsi, la distance parcourue avant l'activation du dispositif d'arrêt est d'environ 20,95m.