Corrigé du bac général 2025
Spécialité Mathématiques
Métropole Remplacement – Jour 2

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site sujetdebac.fr

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé maths au baccalauréat :
www.sujetdebac.fr/annales/specialites/spe-mathematiques/

EXERCICE 1 (6 points)

Partie A

1. Pour chaque année :

- il n'y a que deux issues possibles : « El Niño dominant » ou non
- la probabilité qu'il soit dominant est constante, égale à $0{,}4$
- les années sont supposées indépendantes

On répète donc 10 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, avec probabilité de succès $p = 0{,}4$.

La variable aléatoire X, nombre d'années où El Niño est dominant sur 10 ans, suit donc une loi binomiale $X \sim \mathcal{B}(10; 0{,}4)$.

2.a. Avec la formule de la loi binomiale :

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0,4^2 \times 0,6^8$$

$$= 45 \times 0{,}16 \times 0{,}0168 \approx 0{,}121$$

Donc la probabilité est environ $0{,}121$, soit $12{,}1\ \%$.

2.b. On a :

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

À la calculatrice, on obtient :

$$P(X \leq 2) \approx 0{,}167$$

<u>Interprétation</u> **:** Selon ce modèle, sur une période de 10 ans, il y a environ $16{,}7\ \%$ de chances que le phénomène El Niño soit dominant au plus 2 années seulement. Autrement dit, il est relativement peu probable qu'il soit dominant si rarement.

3. Pour une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$, l'espérance vaut $E(X) = np$.

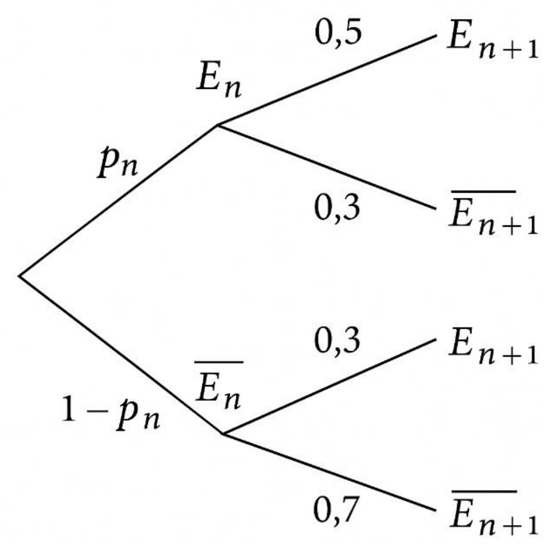
Donc :

$$E(X) = 10 \times 0{,}4 = 4$$

<u>Interprétation</u> **:** Sur une période de 10 ans, le modèle prévoit en moyenne 4 années au cours desquelles le phénomène El Niño est dominant.

Partie B

1. On complète l’arbre pondéré :



2. En 2023, El Niño n’est pas dominant, donc $\overline{E_0}$ est réalisé avec probabilité 1.

Donc :

$$p_1 = P(E_1) = P(E_1 \mid \overline{E_0}) \times P(\overline{E_0}) = 0{,}3 \times 1 = 0{,}3$$

3. Pour tout entier naturel n, on a :

$$p_{n+1} = P(E_{n+1})$$

D’après les lois des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(E_{n+1} \mid E_n) \times P(E_n) + P(E_{n+1} \mid \overline{E_n}) \times P(\overline{E_n}) \\ &= 0{,}5p_n + 0{,}3(1 - p_n) \\ &= 0{,}5p_n + 0{,}3 - 0{,}3p_n \\ &= 0{,}2p_n + 0{,}3 \end{aligned}$$

4.a. Calculons quelques termes avec la calculatrice :

$$p_0 = 0$$

$$p_1 = 0{,}2 \times 0 + 0{,}3 = 0{,}3$$

$$p_2 = 0{,}2 \times 0{,}3 + 0{,}3 = 0{,}36$$

$$p_3 = 0{,}2 \times 0{,}36 + 0{,}3 = 0{,}372$$

$$p_4 = 0{,}2 \times 0{,}372 + 0{,}3 = 0{,}3744$$

Les valeurs semblent croissantes et se rapprochent d'un nombre proche de $0{,}375$.

On conjecture donc que la suite (p_n) est croissante et converge vers une limite $L \approx 0{,}375$.

4.b. On veut montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $p_n \leq \frac{3}{8}$

Initialisation **:** Pour $n = 0$, on a $p_0 = 0 \leq \frac{3}{8}$

La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité **:** Supposons qu'il existe un entier n tel que $p_n \leq \frac{3}{8}$

Alors, d'après la relation de récurrence :

$$p_{n+1} = 0{,}2p_n + 0{,}3 \leq 0{,}2 \times \frac{3}{8} + 0{,}3$$

$$p_{n+1} \leq 0{,}2 \times \frac{3}{8} + 0{,}3$$

$$p_{n+1} \leq \frac{3}{8}$$

La propriété est vraie au rang $n + 1$ si elle est vraie au rang n.

Conclusion **:** Par le principe de récurrence, pour tout entier naturel n : $p_n \leq \frac{3}{8}$

4.c. Étudions la différence suivante :

$$p_{n+1} - p_n = (0{,}2p_n + 0{,}3) - p_n = 0{,}3 - 0{,}8p_n$$

Or d'après la question précédente, on sait que $p_n \leq \frac{3}{8}$, donc :

$$0{,}8p_n \leq 0{,}8 \times \frac{3}{8} = 0{,}3$$

$$\Leftrightarrow 0{,}3 - 0{,}8p_n \geq 0$$

Ainsi, pour tout n :

$$p_{n+1} - p_n \geq 0$$

La suite (p_n) est donc croissante.

4.d. La suite (p_n) est croissante d'après 4.c. et majorée par $\frac{3}{8}$ d'après 4.b.

Une suite croissante et majorée est convergente. Donc la suite (p_n) est convergente.

5.a. On utilise la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{3}{8} = (0{,}2p_n + 0{,}3) - \frac{3}{8}$$

On remplace p_n par $u_n + \frac{3}{8}$:

$$u_{n+1} = 0{,}2\left(u_n + \frac{3}{8}\right) + 0{,}3 - \frac{3}{8}$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = 0{,}2u_n + 0{,}2 \times \frac{3}{8} + 0{,}3 - \frac{3}{8}$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = 0{,}2u_n + \frac{3}{40} + \frac{12}{40} - \frac{15}{40} = 0{,}2u_n$$

Donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0{,}2$.

Son premier terme est :

$$u_0 = p_0 - \frac{3}{8} = 0 - \frac{3}{8} = -\frac{3}{8}$$

5.b. D'après la question précédente, on a :

$$u_n = -\frac{3}{8} \times 0,2^n$$

Or $u_n = p_n - \frac{3}{8}$ donc :

$$p_n = u_n + \frac{3}{8}$$

$$\Leftrightarrow p_n = -\frac{3}{8} \times 0,2^n + \frac{3}{8}$$

$$\Leftrightarrow p_n = \frac{3}{8}(1 - 0,2^n)$$

5.c. La limite de $0,2^n$ quand n tend vers $+\infty$ est 0.

Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{3}{8}(1 - 0) = \frac{3}{8}$$

5.d. Cela signifie que sur un très grand nombre d'années, on peut s'attendre à ce qu'environ $^3/_8 \approx 37{,}5\ \%$ des années soient dominées par le phénomène El Niño.

EXERCICE 2 (5 points)

1. Nombre de façons de choisir 2 filles parmi 14 : $\binom{14}{2} = \frac{14\times13}{2} = 91$

Nombre de façons de choisir 2 garçons parmi 10 : $\binom{10}{2} = \frac{10\times9}{2} = 45$

Chaque groupe de 4 élèves composé de 2 filles et 2 garçons est déterminé par le choix des 2 filles et des 2 garçons, donc le nombre total de groupes possibles est

$$\binom{14}{2} \times \binom{10}{2} = 91 \times 45 = 4095$$

L'affirmation annonce 272 groupes, alors que le calcul donne 4095 groupes.

<u>L'affirmation 1 est fausse.</u>

2. Calcul de la dérivée :

$$f'(x) = 3 \times \cos(2x + \pi) \times 2 = 6\cos(2x + \pi)$$

Pente de la tangente en $x_0 = \frac{\pi}{2}$:

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6\cos\left(2 \times \frac{\pi}{2} + \pi\right) = 6\cos(\pi + \pi) = 6\cos(2\pi) = 6$$

Ordonnée du point de contact :

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\sin\left(2 \times \frac{\pi}{2} + \pi\right) = 3\sin(2\pi) = 0$$

L'équation de la tangente en x_0 est donc :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow y = 6\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 6x - 3\pi$$

<u>L'affirmation 2 est vraie.</u>

3. Calculons la dérivée de F en utilisant la dérivation d'un produit :

$$F'(x) = (2x + 1)'\ln(x) + (2x + 1)(\ln(x))'$$

$$\Leftrightarrow F'(x) = 2\ln(x) + (2x + 1)\frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow F'(x) = 2\ln(x) + 2 + \frac{1}{x} \neq \frac{2}{x}$$

Donc $F'(x) \neq f(x)$.

<u>L'affirmation 3 est fausse.</u>

4. Condition initiale :

$$g(0) = 45e^0 + 20 = 45 + 20 = 65$$

La condition $g(0) = 65$ est bien vérifiée.

Vérification de l'équation différentielle :

$$g'(t) = 45 \times 0{,}06\,e^{0{,}06t} = 2{,}7\,e^{0{,}06t}$$

Puis

$$g'(t) + 0{,}06g(t) = 2{,}7\,e^{0{,}06t} + 0{,}06(45e^{0{,}06t} + 20)$$
$$= 2{,}7\,e^{0{,}06t} + 2{,}7\,e^{0{,}06t} + 1{,}2$$
$$= 5{,}4\,e^{0{,}06t} + 1{,}2$$

Or l'équation (E_1) impose $y' + 0{,}06y = 1{,}2$, c'est-à-dire une fonction constante égale à 1,2, pour tout t.

Ici, on obtient $5{,}4\,e^{0{,}06t} + 1{,}2$, qui dépend de t et n'est donc pas égal à 1,2 pour tout t.

La fonction g n'est donc pas solution de (E_1), même si elle vérifie bien $g(0) = 65$.

<u>L'affirmation 4 est fausse.</u>

5. On dérive l'équation différentielle :

On sait que :

$$y'(x) - y(x) = 3e^{0{,}4x}$$

On dérive membre à membre :

$$y''(x) - y'(x) = 3 \times 0{,}4\,e^{0{,}4x} = 1{,}2\,e^{0{,}4x}$$

De l'équation initiale, on tire :

$$y'(x) = y(x) + 3e^{0{,}4x}$$

En remplaçant dans l'égalité précédente :

$$y''(x) - (y(x) + 3e^{0{,}4x}) = 1{,}2\,e^{0{,}4x}$$
$$\Leftrightarrow y''(x) = y(x) + 3e^{0{,}4x} + 1{,}2\,e^{0{,}4x}$$
$$\Leftrightarrow y''(x) = y(x) + 4{,}2\,e^{0{,}4x}$$

Signe de y'' :

- Par hypothèse, $y(x) > 0$ pour tout x car c'est une fonction positive (cf énoncé).
- Pour tout réel x, $e^{0{,}4x} > 0$, donc $4{,}2e^{0{,}4x} > 0$.

Ainsi, pour tout réel x :

$$y''(x) = y(x) + 4{,}2\,\mathrm{e}^{0{,}4x} > 0$$

La dérivée seconde est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc les solutions sont strictement convexes sur $\mathbb{R}$.

L'affirmation 5 est vraie.

EXERCICE 3 (4 points)

Partie A

1. Résolution de l'inéquation $-x^2 + 7x + 8 \geq 0$

$$\Delta = (7)^2 - 4 \times (-1) \times 8 = 49 + 32 = 81$$

Les racines sont :

$$x_1 = \frac{-7-\sqrt{81}}{-2} = -1, \qquad x_2 = \frac{-7+\sqrt{81}}{-2} = 8$$

Le coefficient de x^2 est négatif, donc le trinôme est ≥ 0 entre les racines.

Les solutions de l'inéquation sont donc $x \in [-1; 8]$

2. Pour $x \in]0; 8]$, d'après la question 1, on a :

$$-x^2 + 7x + 8 \geq 0$$

Donc :

$$-x^2 + 7x + 9 = (-x^2 + 7x + 8) + 1 \geq 1$$

Ainsi, en appliquant la fonction ln qui est croissante sur $]0; 8]$:

$$\ln(-x^2 + 7x + 9) \geq \ln(1) = 0$$

Or sur $]0; 8]$, on a $x > 0$. Donc en divisant par $x > 0$ on conserve le sens de l'inégalité

$$f(x) = \frac{10\ln(-x^2 + 7x + 9)}{x} \geq 0$$

3. Cela signifie que, sur l'intervalle $]0;8]$, la courbe C_f est située au-dessus ou sur l'axe des abscisses. En particulier, le point d'abscisse 8 est sur l'axe des abscisses car :

$$f(8) = \frac{10\ln(-64+56+9)}{8} = \frac{10\ln(1)}{8} = 0$$

Partie B

1. N a la même abscisse que M et est sur l'axe des abscisses, donc $N(x;0)$.

P a la même ordonnée que M et est sur l'axe des ordonnées, donc :

$$P(0;f(x)) = \left(0;\frac{10\ln(-x^2+7x+9)}{x}\right)$$

2. Les côtés du rectangle $ONMP$ ont pour longueurs :

- $ON = x$
- $OP = f(x)$

Donc :

$$A(x) = ON \times OP = x \times f(x) = x \times \frac{10\ln(-x^2+7x+9)}{x} = 10\ln(-x^2+7x+9)$$

3. On a :

$$A(x) = 10\ln(u(x)) \quad \text{avec} \quad u(x) = -x^2+7x+9$$

- La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $(0,+\infty)$.
- Donc $A(x)$ est maximale lorsque $u(x)$ est maximal.

On étudie $u(x)$, qui est un trinôme de coefficient dominant $-1 < 0$, donc sa courbe est une parabole « tournée vers le bas ».

$$u'(x) = -2x+7$$

Par ailleurs :

$$u'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x+7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

- Pour $x < 3{,}5$, on a $u'(x) > 0$, donc u est croissante.
- Pour $x > 3{,}5$, on a $u'(x) < 0$, donc u est décroissante.

Ainsi, sur l'intervalle $]0;8]$, la fonction u atteint un maximum en $x = 3{,}5$.

Comme $A(x) = 10\ln(u(x))$ et que $\ln$ est croissante, A atteint donc aussi son maximum pour $x = 3{,}5$.

Donc l'aire du rectangle est maximale lorsque le point M a pour abscisse $x = 3{,}5$. L'aire maximale vaut alors :

$$A\left(\frac{7}{2}\right) = 10\ln\left(-\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 7 \times \frac{7}{2} + 9\right) = 10\ln(21{,}25) \approx 30{,}6$$

Partie C

1. On complète les lignes 8 et 10.

```
1   from math import *
2
3   def A(x) :
4           return 10*log(-1 * x**2 + 7*x + 9)
5
6   def pluspetitevaleur(k) :
7           x = 3.5
8           while A(x) > k :
9                   x = x + 0.1
10          return x
```

Autrement dit, on augmente x tant que l'aire est encore supérieure à k, puis on renvoie la première valeur de x pour laquelle $A(x) \leq k$

2. Avec l'aide de la calculatrice, l'instruction pluspetitevaleur(30) renvoie :

$$x = 4{,}6$$

3. On a vu en Partie B que l'aire maximale du rectangle vaut environ 30,6. Donc, pour tout $x \in [3{,}5; 8]$, on a :

$$A(x) \leq 30{,}6 < 35$$

En particulier, dès le début de l'algorithme, pour $x = 3{,}5$, on a déjà $A(3{,}5) \leq 35$.

Donc la condition « while A > k » n'est jamais vraie, la boucle n'est pas exécutée, et la fonction renvoie directement la valeur initiale.

L'instruction pluspetitevaleur(35) renvoie donc 3,5.

EXERCICE 4 (5 points)

1. a. On calcule les vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1-4 \\ 1-(-1) \\ -2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0-4 \\ 4-(-1) \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Si les points A, B, C étaient alignés, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ seraient colinéaires. On compare les rapports :

$$\frac{-5}{-4} = 1{,}25 \qquad \frac{2}{5} = 0{,}4 \qquad \frac{-5}{2} = -2{,}5$$

Ces trois rapports sont différents, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Les points A, B, C ne sont donc pas alignés.

1. b. Un point appartient au plan (ABC) si et seulement s'il vérifie l'équation cartésienne du plan. On teste le point $D(-3; -4; 6)$:

$$29 \times (-3) + 30 \times (-4) - 17 \times 6 = -87 - 120 - 102 = -309$$

Or $-309 \neq 35$, donc D n'appartient pas au plan (ABC).

Les quatre points A, B, C, D ne sont donc pas coplanaires.

2. a. Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées :

$$I\left(\frac{4+(-1)}{2} ; \frac{-1+1}{2} ; \frac{3+(-2)}{2}\right) = \left(\frac{3}{2} ; 0 ; \frac{1}{2}\right)$$

2. b. Le plan médiateur P_1 est perpendiculaire à la droite (AB) et passe par I. Un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB} = (-5; 2; -5)$, donc un vecteur normal à P_1 est par exemple

$$\overrightarrow{n_1} = (5; -2; 5)$$

Une équation de P_1 s'écrit donc :

$$5(x - 3/2) - 2(y - 0) + 5(z - 1/2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x - \frac{15}{2} - 2y + 5z - \frac{5}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x - 2y + 5z - 10 = 0$$

Donc une équation cartésienne de P_1 est $5x - 2y + 5z = 10$.

3. a. On a :

$$MC^2 = (x-0)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2$$

$$MD^2 = (x+3)^2 + (y+4)^2 + (z-6)^2$$

Le point M appartient au plan médiateur P_2 si et seulement si $MC^2 = MD^2$.

On considère donc :

$$MC^2 - MD^2 = 0$$

En développant (on regroupe directement les termes) :

$$MC^2 - MD^2 = (x^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2) - ((x+3)^2 + (y+4)^2 + (z-6)^2)$$

On obtient après simplification :

$$MC^2 - MD^2 = -6x - 16y + 2z - 20$$

L'égalité $MC^2 = MD^2$ équivaut donc à :

$$-6x - 16y + 2z - 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + 8y - z + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x - 8y + z = 10$$

Une équation cartésienne de P_2 est donc bien $-3x - 8y + z = 10$.

3. b. Un vecteur normal à P_1 est $\overrightarrow{n_1} = (5; -2; 5)$.

Un vecteur normal à P_2 est $\overrightarrow{n_2} = (-3; -8; 1)$.

Si les plans étaient parallèles, ces deux vecteurs seraient colinéaires. On compare les rapports :

$$\frac{5}{-3} \neq \frac{-2}{-8}$$

Donc $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires, les plans ne sont pas parallèles, ils sont sécants suivant une droite.

4. Soit $M(t)$ le point de Δ de paramètre t.

Vérifions d'abord que $M(t)$ appartient à P_1.

On calcule :

$$5x - 2y + 5z = 5(-2 - 1{,}9t) - 2t + 5(4 + 2{,}3t)$$

$$= (-10 - 9{,}5t) - 2t + (20 + 11{,}5t) = -10 - 9{,}5t - 2t + 20 + 11{,}5t = 10$$

Donc pour tout t, $M(t)$ vérifie $5x - 2y + 5z = 10$. Donc $M(t) \in P_1$.

Vérifions ensuite que $M(t)$ appartient à P_2.

On calcule :

$$-3x - 8y + z = -3(-2 - 1{,}9t) - 8t + (4 + 2{,}3t)$$

$$= (6 + 5{,}7t) - 8t + 4 + 2{,}3t = 6 + 5{,}7t - 8t + 4 + 2{,}3t = 10$$

Donc pour tout t, $M(t)$ vérifie $-3x - 8y + z = 10$. Donc $M(t) \in P_2$.

Ainsi, tous les points de Δ appartiennent à la fois à P_1 et à P_2.

Or l'intersection de deux plans sécants est une droite, et Δ est une droite. On en déduit que Δ est exactement la droite d'intersection des plans P_1 et P_2.

5. On note P_3 le plan médiateur de $[AC]$, d'équation (admise) :

$$8x - 10y - 4z = -15$$

On cherche les éventuels points communs entre Δ et P_3. Soit $M(t)$ un point de Δ :

$$x = -2 - 1{,}9t, \quad y = t, \quad z = 4 + 2{,}3t$$

On remplace dans l'équation de P_3 :

$$8x - 10y - 4z = 8(-2 - 1{,}9t) - 10t - 4(4 + 2{,}3t)$$

$$= -16 - 15{,}2t - 10t - 16 - 9{,}2t = -32 - 34{,}4t$$

On impose $M(t) \in P_3$, donc :

$$-32 - 34{,}4t = -15$$

$$-34{,}4t = 17$$

$$t = -\frac{17}{34{,}4} \approx -0{,}49$$

Cette équation admet une unique solution en t. Il existe donc un unique point de Δ appartenant à P_3.

La droite Δ et le plan P_3 sont donc sécants.

(On peut en déduire les coordonnées du point d'intersection en remplaçant ce t dans les expressions de x, y, z.)

6. La droite Δ est l'intersection des plans médiateurs P_1 de $[AB]$ et P_2 de $[CD]$.

Le point d'intersection de Δ et P_3 appartient donc aux trois plans médiateurs P_1, P_2, P_3.

Ainsi, il vérifie :

$$HA = HB \text{ (car } H \in P_1) \qquad HC = HD \text{ (car } H \in P_2) \qquad HA = HC \text{ (car } H \in P_3)$$

On en déduit $HA = HB = HC = HD$. H est équidistant de A, B, C et D. C'est donc bien le point H cherché.

(On trouve numériquement, en remplaçant la valeur de t correspondante dans les expressions de x, y, z, des coordonnées approchées $H(-1{,}1\ ;\ -0{,}5\ ;\ 2{,}9)$ au dixième près.)

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé maths au baccalauréat :
www.sujetdebac.fr/annales/specialites/spe-mathematiques/