Corrigé du bac général 2025
Spécialité Mathématiques
Nouvelle-Calédonie – Jour 1

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

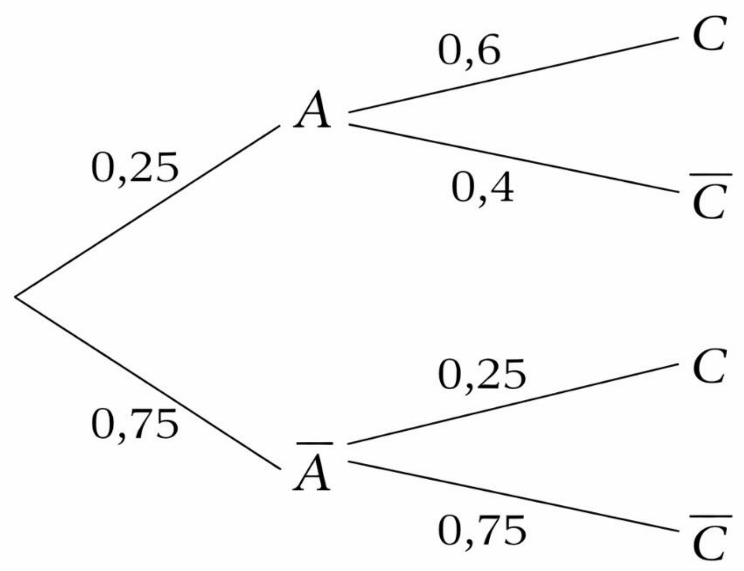
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site sujetdebac.fr

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé maths au baccalauréat :
www.sujetdebac.fr/annales/specialites/spe-mathematiques/

EXERCICE 1 (5 points)

1. On complète l'arbre :



2. On cherche $P(A \cap C)$. On s'aide de l'arbre :

$$P(A \cap C) = P(A) \times P(C \mid A) = 0{,}25 \times 0{,}6 = 0{,}15$$

3. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(C) = P(A)P(C \mid A) + P(\overline{A})P(C \mid \overline{A})$$

Donc :

$$P(C) = 0{,}25 \times 0{,}6 + 0{,}75 \times 0{,}25 = 0{,}3375$$

4. « Le joueur a obtenu un billet de 10 euros » signifie $\overline{C}$.

On calcule :

$$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0{,}3375 = 0{,}6625$$

et

$$P(\overline{A} \cap \overline{C}) = P(\overline{A})\, P(\overline{C} \mid \overline{A}) = 0{,}75 \times 0{,}75 = 0{,}5625$$

Alors

$$P\left(\overline{A} \mid \overline{C}\right) = \frac{P\left(\overline{A} \cap \overline{C}\right)}{P\left(\overline{C}\right)} = \frac{0{,}5625}{0{,}6625} = \frac{45}{53} \approx 0{,}849 > 0{,}80$$

L'affirmation est donc vraie.

5. La variable X_1 vaut 50 avec la probabilité $P(C) = 0{,}3375$, et 10 avec la probabilité $0{,}6625$.

Donc :

$$E(X_1) = 50 \times 0{,}3375 + 10 \times 0{,}6625 = 23{,}5$$

Pour la variance, on calcule d'abord :

$$E(X_1^2) = 50^2 \times 0{,}3375 + 10^2 \times 0{,}6625 = 2500 \times \frac{27}{80} + 100 \times \frac{53}{80} = 910$$

Puis :

$$V(X_1) = E(X_1^2) - (E(X_1))^2 = 910 - 23{,}5^2 = 910 - 552{,}25 = 357{,}75$$

6. a. On a $Y = X_1 + X_2$, donc par linéarité de l'espérance $E(Y) = E(X_1) + E(X_2)$.

Comme on remet la boule et le billet, la 2e partie est identique à la 1re, donc $E(X_2) = E(X_1) = 23{,}5$.

Ainsi $E(Y) = 23{,}5 + 23{,}5 = 47$

6. b. Les deux parties sont indépendantes (on remet tout en place et on rejoue dans les mêmes conditions), donc X_1 et X_2 sont indépendantes. Dans ce cas, on a :

$$V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2)$$

On obtient donc $V(Y) = V(X_1) + V(X_2)$ comme demandé.

7. Les variables $X_1, \dots, X_{100}$ sont identiquement distribuées et indépendantes.

Donc :

$$E(Z) = E(X_1 + \dots + X_{100}) = 100\,E(X_1) = 100 \times 23{,}5 = 2350$$

et

$$V(Z) = V(X_1) + \dots + V(X_{100}) = 100\,V(X_1) = 100 \times 357{,}75 = 35775$$

L'intervalle $]1950; 2750[$ est centré en 2350 et correspond à $|Z - 2350| < 400$.

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$P(|Z - E(Z)| \geq 400) \leq \frac{V(Z)}{400^2} = \frac{35775}{160000} = 0{,}22359375$$

Donc :

$$P(|Z - 2350| < 400) \geq 1 - 0{,}22359375 = 0{,}77640625$$

Ainsi $P(Z \in]1950; 2750[) \geq 0{,}7764$, ce qui est bien supérieur ou égal à 0,75.

EXERCICE 2 (4 points)

1. On calcule les vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1; 1; -2) \qquad \overrightarrow{BC} = C - B = (1; 1; 1)$$

Le produit scalaire vaut :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 \times 1 + 1 \times 1 + (-2) \times 1 = 0$$

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux, ce qui prouve que le triangle ABC est rectangle en B.

2. Comme le triangle ABC est rectangle, alors les points A, B et C ne sont pas alignés. Vérifions que les coordonnées des points A, B et C vérifient l'équation du plan proposée.

$$x_A - y_A - 8 = 4 - (-4) - 8 = 4 + 4 - 8 = 0$$

$$x_B - y_B - 8 = 5 - (-3) - 8 = 5 + 3 - 8 = 0$$

$$x_C - y_C - 8 = 6 - (-2) - 8 = 6 + 2 - 8 = 0$$

Les points A, B et C appartiennent à ce plan. Donc l'équation du plan (ABC) est bien :

$$x - y - 8 = 0$$

3. a. La droite d passe par $D(5; 1; 1)$ et est orthogonale au plan (ABC), donc elle a pour vecteur directeur un vecteur normal au plan, par exemple $\vec{n} = (1; -1; 0)$.

Une représentation paramétrique de d est donc

$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

3. b. Le point H est l'intersection de d avec le plan (ABC). On remplace dans l'équation du plan $x - y - 8 = 0$:

$$(5 + t) - (1 - t) - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5 + t - 1 + t - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2t - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 2$$

Donc :

$$H(5 + 2;\ 1 - 2;\ 1) = (7; -1; 1)$$

3. c. On calcule :

$$DH = \| \overrightarrow{DH} \| = \sqrt{(7-5)^2 + (-1-1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

4. a. On prend comme base le triangle ABC. D'après la question 1, il est rectangle en B, donc :

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} AB \times BC$$

Or

$$AB = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6} \qquad BC = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

Donc :

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}\sqrt{6}\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{18} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

La hauteur issue de D sur le plan (ABC) est DH, donc $h = 2\sqrt{2}$.

Ainsi :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(ABC) \times DH = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} \times 2\sqrt{2}$$

$$V = \frac{1}{3} \times 6 = 2$$

4. b. On considère maintenant la même pyramide avec pour base le triangle BCD, et on admet :

$$\mathcal{A}(BCD) = \frac{\sqrt{42}}{2}$$

Si h_A désigne la distance du point A au plan (BCD), alors :

$$2 = V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(BCD) \times h_A$$

Donc :

$$h_A = \frac{6}{\mathcal{A}(BCD)} = \frac{6}{\sqrt{42}/2} = \frac{12}{\sqrt{42}} = \frac{12\sqrt{42}}{42} = \frac{2\sqrt{42}}{7}$$

La distance du point A au plan (BCD) vaut donc $\frac{2\sqrt{42}}{7}$.

EXERCICE 3 (6 points)

Partie A

1. Pour tout $x \in [0; 1]$, on a $f_1(x) = x\,\mathrm{e}^{1-x}$.

Par produit :

$$f'_1(x) = 1 \cdot \mathrm{e}^{1-x} + x \cdot (-\mathrm{e}^{1-x}) = \mathrm{e}^{1-x}(1-x)$$

Or $\mathrm{e}^{1-x} > 0$ et, pour $x \in [0; 1[$, $1 - x > 0$.

Donc $f'_1(x) > 0$ sur $[0; 1[$.

2. Comme $f'_1(x) > 0$ sur $[0; 1[$, la fonction f_1 est strictement croissante sur $[0; 1]$.

De plus :

$$f_1(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_1(1) = 1$$

Ainsi, on a le tableau de variations suivant :

x	0		1
$f'_1(x)$		$+$	
$f_1(x)$	0	$\nearrow$	1

3. La fonction f_1 est continue et strictement croissante sur $[0; 1]$.

Comme $f_1(0) = 0 < 0{,}1$ et $f_1(1) = 1 > 0{,}1$, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'une solution dans $[0; 1]$.

Donc l'équation $f_1(x) = 0{,}1$ admet une unique solution dans $[0; 1]$.

Partie B

1. a. Soit $x \in [0; 1]$ et $n \geq 1$.

On a $x^n \geq 0$ et :

$$x^{n+1} = x^n \cdot x \leq x^n \cdot 1 = x^n$$

Donc

$$0 \leq x^{n+1} \leq x^n$$

1. b. Pour $x \in [0; 1]$, on a $\mathrm{e}^{1-x} > 0$. En multipliant l'inégalité précédente par e^{1-x} puis en intégrant de 0 à 1 (par croissance de l'intégrale) :

$$0 \leq \int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{e}^{1-x}\,dx \leq \int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{1-x}\,dx$$

C'est-à-dire :

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

1. c. On vient de montrer que (u_n) est décroissante et qu'elle est minorée par 0.

Une suite décroissante et minorée converge. Donc (u_n) est convergente.

2. a. On calcule $u_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{e}^{1-x}\,dx$ par intégration par parties, en posant :

$u(x) = x^{n+1}$ donc $u'(x) = (n+1)x^n$

$v'(x) = \mathrm{e}^{1-x}$ donc $v(x) = -\mathrm{e}^{1-x}$

Alors :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= [x^{n+1}(-\mathrm{e}^{1-x})]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n(-\mathrm{e}^{1-x})\,dx \\
&= -e^0 + 0 + \int_0^1 (n+1)x^n e^{1-x} dx \\
&= -1 + (n+1)\int_0^1 x^n e^{1-x} dx \\
&= -1 + (n+1)u_n \\
&= (n+1)u_n - 1
\end{aligned}$$

2. b. On a $\int_0^1 x^8\,\mathrm{e}^{1-x}\,dx = u_8$.

On part de $u_1 = \mathrm{e} - 2$ et on applique 7 fois la relation $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$ (pour $n = 1$ jusqu'à $n = 7$).

```
from math import exp

def suite() :
        u = exp(1) - 2
        for n in range(1,8) :
                u = (n+1) * u - 1
        return u
```

3. a. Pour $x \in [0; 1]$, on a $1 - x \leq 1$, donc $\mathrm{e}^{1-x} \leq \mathrm{e}$. Ainsi, par croissance de l'intégrale :

$$u_n = \int_0^1 x^n \, \mathrm{e}^{1-x} \, dx \leq \int_0^1 x^n \, \mathrm{e} \, dx$$

Donc :

$$u_n \leq \mathrm{e} \int_0^1 x^n \, dx = \mathrm{e} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{\mathrm{e}}{n+1}$$

3. b. On a, pour tout $n \geq 1$:

$$0 \leq u_n \leq \frac{\mathrm{e}}{n+1}$$

Or :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{e}}{n+1} = 0$$

Donc par encadrement (théorème des gendarmes), $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

EXERCICE 4 (5 points)

Affirmation 1 : vraie

On factorise :

$$f(x) = \ln(x) - x^2 = x^2 \left(\frac{\ln(x)}{x^2} - 1 \right)$$

On sait, par croissances comparées, que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$$

Donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} - 1 = -1$$

Et donc :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

Affirmation 2 : vraie

On pose $y = f$ avec $f(x) = 2\cos(x) - \sin(x)$.

Alors :

$$f'(x) = -2\sin(x) - \cos(x)$$

On calcule le membre de gauche de (E) :

$$-2f'(x) + 3f(x) = -2(-2\sin(x) - \cos(x)) + 3(2\cos(x) - \sin(x))$$
$$= 4\sin(x) + 2\cos(x) + 6\cos(x) - 3\sin(x) = \sin(x) + 8\cos(x)$$

On retrouve bien le membre de droite de (E). Donc f est solution de (E).

Affirmation 3 : vraie

Montrons par récurrence que, pour tout n, $u_{n+1} < u_n$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_1 = \ln(76) + 8 \approx 12{,}33$ et $u_0 = 25$, donc $u_1 < u_0$.

La propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : Supposons $u_{n+1} < u_n$. Alors :

$$3u_{n+1} + 1 < 3u_n + 1$$

Comme $\ln$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, on obtient :

$$\ln(3u_{n+1} + 1) < \ln(3u_n + 1)$$
$$\Leftrightarrow \ln(3u_{n+1} + 1) + 8 < \ln(3u_n + 1) + 8$$
$$\Leftrightarrow u_{n+2} < u_{n+1}$$

La propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : Pour tout n, $u_{n+1} < u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante.

Affirmation 4 : vraie

Une fonction affine h s'écrit sous la forme $h(x) = ax + b$

On a donc :

$$k(x) = x^4 + x^2 + ax + b$$
$$k'(x) = 4x^3 + 2x + a$$
$$k''(x) = 12x^2 + 2$$

Or $12x^2 + 2 \geq 2$ pour tout réel x. Donc $k''(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$, ainsi k est convexe sur $\mathbb{R}$.

Affirmation 5 : fausse

Le mot EULER a 5 lettres dont la lettre E apparaît deux fois.

Le nombre d'anagrammes est donc :

$$\frac{5!}{2!} = 60$$

Il n'y en a pas 120.

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé maths au baccalauréat :
www.sujetdebac.fr/annales/specialites/spe-mathematiques/