Corrigé du bac général 2025
Spécialité Mathématiques
Nouvelle-Calédonie – Jour 2

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site sujetdebac.fr

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé maths au baccalauréat :
www.sujetdebac.fr/annales/specialites/spe-mathematiques/

EXERCICE 1 (4 points)

Dans le repère orthonormé $(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on a :

$A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(1,1,0)$, $D(0,1,0)$, $E(0,0,1)$, $F(1,0,1)$, $G(1,1,1)$, $H(0,1,1)$.

De plus $\overrightarrow{FB} = B - F = (0,0,-1)$, donc $\overrightarrow{FI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{FB} = (0,0,-\frac{1}{3})$

Par ailleurs : $I = F + \overrightarrow{FI} = (1,0,\frac{2}{3})$

<u>1. Affirmation 1 : fausse</u>

On calcule les longueurs :

$$HA = \sqrt{(0-0)^2 + (0-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$$
$$AC = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{2}$$
$$HC = \sqrt{(1-0)^2 + (1-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$$

Les trois côtés ont la même longueur, donc HAC est équilatéral, et il ne peut pas être rectangle.

L'affirmation 1 est fausse.

<u>2. Affirmation 2 : vraie</u>

Une représentation paramétrique de (HF) est :

$$H(0,1,1) + t(F-H) = (0,1,1) + t(1,-1,0)$$

donc $(x,y,z) = (t, 1-t, 1)$

Une représentation paramétrique de (DI) est :

$$D(0,1,0) + s(I-D) = (0,1,0) + s(1,-1,\frac{2}{3})$$

donc $(x,y,z) = (s, 1-s, \frac{2}{3}s)$

Pour une intersection, on impose $(t, 1-t, 1) = (s, 1-s, \frac{2}{3}s)$. Il faut résoudre le système :

$$\begin{cases} t = s \\ 1-t = 1-s \\ 1 = \dfrac{2}{3}s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = s \\ t = s \\ s = \dfrac{3}{2} = t \end{cases}$$

Il existe donc un point commun $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$ aux deux droites. Ce point est en dehors du cube.

L'affirmation 2 est vraie.

3. Affirmation 3 : fausse

On simplifie $\vec{u}$ car $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$ et $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$. Ainsi :

$$\vec{u} = (\sin\alpha, \sin\alpha, -\sin\alpha) = \sin\alpha\,(1,1,-1)$$

Dans le plan (FAC), on peut prendre deux vecteurs directeurs non colinéaires :

$$\overrightarrow{FA} = A - F = (-1,0,-1) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{FC} = C - F = (0,1,-1)$$

Un vecteur normal au plan est alors :

$$\overrightarrow{FA} \times \overrightarrow{FC} = (1,-1,-1)$$

Or $(1,1,-1)$ n'est pas colinéaire à $(1,-1,-1)$. Les deux premières coordonnées ne sont pas proportionnelles. Donc $\vec{u}$ n'est pas normal au plan (FAC).

L'affirmation 3 est fausse.

4. Affirmation 4 : fausse

Un segment est déterminé par un choix de 2 sommets distincts parmi 8, donc :

$$N = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2! \times 6!} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

Alors que $\frac{8^2}{2} = \frac{64}{2} = 32$.

L'affirmation 4 est fausse.

EXERCICE 2 (6 points)

Partie A

ZONE 1 (au-dessus de $y = x$) : c'est un triangle rectangle de côtés 1 et 1, donc son aire vaut :

$$\frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$$

ZONE 2 (sous la parabole $y = x^2$) : son aire vaut l'aire « sous la courbe » entre 0 et 1, donc :

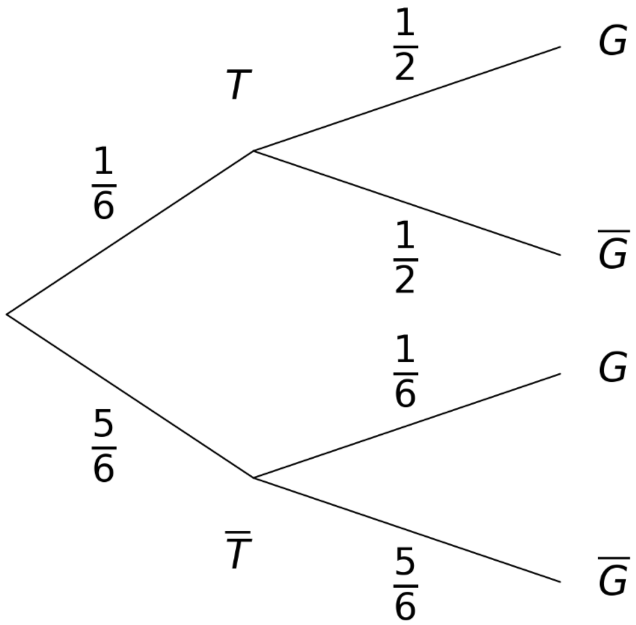
$$\int_0^1 x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

ZONE 3 (entre $y = x$ et $y = x^2$) : c'est la différence entre l'aire sous $y = x$ et l'aire sous $y = x^2$, donc :

$$\int_0^1 (x - x^2)\ dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Partie B

1. On représente la situation par un arbre pondéré :



2. On utilise la formule des probabilités totales :

$$P(G) = P(T)\,P(G \mid T) + P(\overline{T})\,P(G \mid \overline{T})$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12} + \frac{5}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

3. On cherche $P(T \mid G)$:

$$P(T \mid G) = \frac{P(T \cap G)}{P(G)} = \frac{P(T)\,P(G \mid T)}{P(G)}$$

$$= \frac{\frac{1}{6} \times \frac{1}{2}}{\frac{2}{9}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{2}{9}} = \frac{1}{12} \times \frac{9}{2} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

Partie C

1. a. La variable X_1 prend les valeurs 1, 2, 3 avec :

$P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $P(X_1 = 2) = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $P(X_1 = 3) = \frac{1}{6}$

Donc :

$$E(X_1) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

1. b. On calcule d'abord $E(X_1^2)$:

$$E(X_1^2) = 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{3} + 3^2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{9}{6} = 2 + \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$$

Alors :

$$V(X_1) = E(X_1^2) - (E(X_1))^2 = \frac{10}{3} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{10}{3} - \frac{25}{9} = \frac{5}{9}$$

2. a. Avoir $Y = 9$ signifie $X_1 + X_2 + X_3 = 9$. Or chaque $X_i \leq 3$, donc cela n'est possible que si $X_1 = X_2 = X_3 = 3$.

Ainsi, comme les variables X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes :

$$P(Y = 9) = P(X_1 = 3) \times P(X_2 = 3) \times P(X_3 = 3) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$$

2. b. Par linéarité de l'espérance :

$$E(Y) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 3\,E(X_1) = 3 \times \frac{5}{3} = 5$$

2. c. Comme X_1, X_2, X_3 sont indépendantes, la variance d'une somme est la somme des variances :

$$V(Y) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) = 3\,V(X_1) = 3 \times \frac{5}{9} = \frac{5}{3}$$

EXERCICE 3 (5 points)

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}e^{x/2}}{e^{x/2} + 2}$$

Or $e^{x/2} > 0$ et $e^{x/2} + 2 > 0$, donc $f'(x) > 0$ pour tout x.

Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. On calcule :

$$f(2\ln(2)) = \ln\left(e^{\frac{2\ln 2}{2}} + 2\right) = \ln\left(e^{\ln 2} + 2\right)$$

$$= \ln(2+2) = \ln(4) = \ln(2^2) = 2\ln(2)$$

3. On a $u_1 = f(u_0)$, donc :

$$u_1 = \ln\left(e^{\ln(9)/2} + 2\right) = \ln\left(e^{\ln(3)} + 2\right) = \ln(3+2) = \ln(5)$$

4. On montre par récurrence la propriété P_n: $2\ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n$.

Initialisation :

On sait que $u_0 = \ln(9)$ et $u_1 = \ln(5)$.

De plus $2\ln(2) = \ln(4)$.

Comme $\ln$ est croissante, alors :

$$\ln(4) \leq \ln(5) \leq \ln(9)$$

$$\Leftrightarrow 2\ln(2) \leq u_1 \leq u_0$$

Donc P_0 est vraie.

Hérédité :

On suppose P_n vraie, donc $2\ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n$.

Comme f est croissante (question 1), on a :

$$f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$$

C'est-à-dire :

$$u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

Et, toujours parce que f est croissante et car on sait que $2\ln(2) \leq u_{n+1}$, on déduit :

$$f(2\ln(2)) \leq f(u_{n+1})$$

Donc, avec la question 2 :

$$2\ln(2) \leq u_{n+2}$$

On a bien $2\ln(2) \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$, donc P_{n+1} est vraie.

<u>Conclusion :</u>

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$2\ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n$$

5. D'après la question 4, $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n, donc (u_n) est décroissante.

Toujours d'après la question 4, $u_{n+1} \geq 2\ln(2)$ pour tout n, donc (u_n) est minorée par $2\ln(2)$.

Une suite décroissante et minorée est convergente. Donc (u_n) converge.

6. a. On factorise :

$$X^2 - X - 2 = (X-2)(X+1)$$

Donc les solutions réelles sont $X = 2$ ou $X = -1$.

Autre méthode plus longue : On calcule le discriminant Δ puis les 2 racines.

6. b. On pose $X = e^{x/2}$.

Alors $X > 0$ et $e^x = (e^{x/2})^2 = X^2$

Ainsi :

$$e^x - e^{x/2} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow X^2 - X - 2 = 0$$

D'après la question 6. a., $X = 2$ ou $X = -1$, mais $X > 0$ donc $X = 2$.

Ainsi :

$$e^{x/2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{2} = \ln(2) \quad \Leftrightarrow \quad x = 2\ln(2)$$

L'ensemble des solutions est donc $\{2\ln(2)\}$.

6. c. Résoudre $f(x) = x$ revient à résoudre :

$$\ln\left(e^{x/2} + 2\right) = x$$

$$\Leftrightarrow e^{x/2} + 2 = e^x$$

$$\Leftrightarrow e^x - e^{x/2} - 2 = 0$$

D'après la question 6. b., la seule solution est $x = 2\ln(2)$.

Donc l'ensemble des solutions de $f(x) = x$ est $\{2\ln(2)\}$.

6. d. On sait (question 5) que (u_n) converge vers une limite ℓ. Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ et que f est continue (composition de fonctions continues), alors :

$$\ell = f(\ell)$$

Donc ℓ est une solution de $f(x) = x$.

Or d'après la question 6. c., il n'y a qu'une solution : $2\ln(2)$.

Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 2\ln(2)$$

EXERCICE 4 (5 points)

1. On a :

$$\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0} x^2 = 0^+$$

Donc, par quotient :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$$

On en déduit que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

Par ailleurs, par croissance comparées, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

On en déduit que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

2. Pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln(x) \times 2x}{(x^2)^2} \\ &= \frac{x - 2x\ln(x)}{x^4} \\ &= \frac{x(1 - 2\ln(x))}{x^4} \\ &= \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3} \end{aligned}$$

3. Sur $]0; +\infty[$, on a $x^3 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - 2\ln(x)$.

$$1 - 2\ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$$

On en déduit le tableau de variation :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$1 + \frac{1}{2e}$	↘	1

Avec :

$$f(\sqrt{e}) = \frac{\ln(\sqrt{e})}{(\sqrt{e})^2} + 1 = \frac{\frac{1}{2}}{e} + 1 = 1 + \frac{1}{2e} \approx 1{,}184$$

4. a. D'après les questions précédentes, on a :

- f est continue et strictement croissante sur $]0; \sqrt{e}[$
- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty < 0$
- $f(\sqrt{e}) = 1 + \frac{1}{2e} \approx 1{,}184 > 0$

Donc f ne peut s'annuler qu'une seule fois sur cet intervalle (théorème des valeurs intermédiaires).

De plus, sur $[\sqrt{e}; +\infty[$, f est continue et décroissante et tend vers 1, donc $f(x) \geq 1$ sur $[\sqrt{e}; +\infty[$ et elle ne peut pas s'y annuler.

Il existe donc une unique solution α de $f(x) = 0$ sur $]0; +\infty[$.

4. b. On calcule à la calculatrice :

$$f(0{,}65) \approx -0{,}0196$$

$$f(0{,}66) \approx 0{,}0461$$

Comme f est croissante sur $]0; \sqrt{e}[$ et change de signe entre $0{,}65$ et $0{,}66$, on obtient l'encadrement suivant :

$$0{,}65 < \alpha < 0{,}66$$

4. c. On déduit le tableau de signes d'après les questions précédentes.

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Ainsi, f est négative sur $]0; \alpha[$ et positive sur $]\alpha; +\infty[$.

5. a. Sur $\mathcal{C}_g$, le point M a pour coordonnées $(x, \ln(x))$.

Donc :

$$OM^2 = x^2 + \ln^2(x)$$

5. b. Posons $\mathrm{h}(x) = OM^2 = x^2 + \ln^2(x)$ sur $]0; +\infty[$.

Alors :

$$h'(x) = 2x + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x)$$
$$= 2x + \frac{2\ln(x)}{x}$$
$$= 2x \times \left(1 + \frac{\ln(x)}{x^2}\right)$$
$$= 2xf(x)$$

Ainsi, $h'(x)$ est du signe de $f(x)$ et s'annulera en α.

On obtient le tableau de variation suivant :

x	0		α		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$h(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi $h(x)$ décroît sur $]0;\alpha[$ puis croît sur $]\alpha;+\infty[$, donc $\mathrm{h}(x) = OM^2$ admet un minimum en α.

5. c. La distance minimale vaut

$$d = \sqrt{\mathrm{h}(\alpha)} = \sqrt{\alpha^2 + \ln^2(\alpha)}$$

Or $f(\alpha) = 0$ donne $\frac{\ln(\alpha)}{\alpha^2} + 1 = 0$, donc $\ln(\alpha) = -\alpha^2$ et $\ln^2(\alpha) = \alpha^4$.

Ainsi :

$$d = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^4} = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$$

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé maths au baccalauréat :
www.sujetdebac.fr/annales/specialites/spe-mathematiques/