BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Jour 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1/8 à 8/8.

Sauf mention contraire, toute réponse devra être justifiée.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1. (5 points)

En France il y a deux formules pour obtenir le permis de conduire :

- Suivre à partir de 15 ans une formation de conduite accompagnée pendant 2 ans ;
- Suivre la formation classique (sans conduite accompagnée) à partir de 17 ans.

En France actuellement, parmi les jeunes qui suivent une formation au permis de conduire, 16 % choisissent la formation de conduite accompagnée, et parmi eux, 74,7% réussissent l'examen de conduite dès leur première tentative.
En suivant la formation classique, le taux de réussite dès la première tentative est seulement de 56,8 %.

On choisit au hasard un jeune français qui a déjà passé l'examen de conduite et on considère les événements A et R suivants :

- A : « le jeune a suivi la formation de conduite accompagnée » ;
- R : « le jeune a eu le permis dès sa première tentative ».

On arrondira les résultats à 10^{-3} près, si nécessaire.

Partie A :

1. Dresser un arbre de probabilités modélisant cette situation.
2. **a.** Démontrer que $P(\mathrm{R}) = 0{,}59664$.
   Dans la suite, on gardera la valeur 0,597 arrondie à 10^{-3} près.
   b. Donner ce résultat en pourcentage et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.
3. On choisit un jeune ayant eu son permis dès sa première tentative. Quelle est la probabilité qu'il ait suivi la formation de conduite accompagnée ?
4. Quelle devrait être la proportion de jeunes suivant la formation de conduite accompagnée si on voulait que le taux de réussite global (quelle que soit la formation choisie) dès la première tentative à l'examen de conduite dépasse 70 % ?

Partie B :

Une auto-école présente pour la première fois à l'examen de conduite 10 candidats qui ont suivi la formation de conduite accompagnée. On modélise le fait de passer les examens de conduite par des épreuves aléatoires indépendantes.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de ces 10 candidats qui auront leur permis dès la première tentative.

1. Justifier que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}747$.
2. Calculer $P(X \geq 6)$. Interpréter ce résultat.
3. Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.

4. Il y a aussi 40 candidats qui n'ont pas suivi la formation de conduite accompagnée et qui se présentent pour la première fois à l'examen de conduite. De la même manière, on note Y la variable aléatoire qui donne le nombre de ces candidats qui auront le permis à la première tentative. On admet que Y est indépendante de la variable X et qu'en fait $E(Y) = 22{,}53$ et $V(Y) = 9{,}81$.

On note alors Z la variable aléatoire comptant le nombre total de candidats (parmi les 50) qui auront le permis de conduire dès la première tentative dans cette auto-école.

a. Exprimer Z en fonction de X et Y. En déduire $E(Z)$ et $V(Z)$.

b. En utilisant l'inégalité de Bienaymé -Tchebychev, montrer que la probabilité qu'il y ait moins de 20 ou plus de 40 candidats qui aient leur permis dès la première tentative est inférieure à 0,12.

Exercice 2. (5 points)

On étudie l'évolution de la population d'une espèce animale au sein d'une réserve naturelle.
Les effectifs de cette population ont été recensés à différentes années. Les données collectées sont présentées dans le tableau suivant :

Année	2000	2005	2010	2015
Nombre d'individus	50	64	80	100

Pour anticiper l'évolution de cette population, la direction de la réserve a choisi de modéliser le nombre d'individus en fonction du temps.
Pour cela, elle utilise une fonction, définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, dont la variable x représente le temps écoulé, en année, à partir de l'année 2000.
Dans son modèle, l'image de 0 par cette fonction vaut 50, ce qui correspond au nombre d'individus en l'an 2000.

Partie A. Modèle 1

Dans cette partie, la direction de la réserve fait l'hypothèse que la fonction cherchée satisfait l'équation différentielle suivante :

$$y' = 0{,}05y - 0{,}5 \quad (E_1)$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E_1) avec la condition initiale $y(0) = 50$.
2. Comparer les résultats du tableau avec ceux que l'on obtiendrait avec ce modèle.

Partie B. Modèle 2

Dans cette partie, la direction de la réserve fait l'hypothèse que la fonction cherchée satisfait l'équation différentielle suivante :

$$y' = 0{,}05y(1 - 0{,}00125y) \quad (E_2)$$

On note f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{800}{1 + 15\mathrm{e}^{-0{,}05x}}$$

et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu les résultats suivants.

Pour toute la suite de l'exercice, on pourra utiliser ces résultats sans les démontrer, sauf pour la question 5.

	Instruction	Résultat
1	$f(x) \coloneqq \dfrac{800}{1+15\mathrm{e}^{-0{,}05x}}$	$f(x) = \dfrac{800}{1+15\mathrm{e}^{-0{,}05x}}$
2	$f'(x) \coloneqq$ Dérivée $\big(f(x)\big)$	$f'(x) = \dfrac{6\,00\mathrm{e}^{-0{,}05x}}{(1+15\mathrm{e}^{-0{,}05x})^2}$
3	$f''(x) \coloneqq$ Dérivée $(f'(x))$	$f''(x) = \dfrac{30\mathrm{e}^{-0{,}05x}}{(1+15\mathrm{e}^{-0{,}05x})^3}(15\mathrm{e}^{-0{,}05x}-1)$
4	Résoudre $(15\mathrm{e}^{-0{,}05x}-1 \geq 0)$	$x \leq 20\ln(15)$

1. Démontrer que la fonction f vérifie $f(0) = 50$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 0{,}05f(x)\big(1-0{,}00125f(x)\big)$$

On admet que cette fonction f est l'unique solution de (E_2) prenant la valeur initiale de 50 en 0.

2. Avec ce nouveau modèle f, estimer l'effectif de cette population en 2050. Arrondir le résultat à l'unité.

3. Calculer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire quant à la courbe C ? Interpréter cette limite dans le cadre de ce problème concret.

4. Justifier que la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$.

5. Démontrer le résultat obtenu en ligne 4 du logiciel.

6. On admet que la vitesse de croissance de la population de cette espèce, exprimée en nombre d'individus par an, est modélisée par la fonction f'.

a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe C.

b. La direction de la réserve affirme :

« Au vu de ce modèle, la vitesse de croissance de la population de cette espèce va augmenter pendant un peu plus de cinquante ans, puis va diminuer ».

La direction a-t-elle raison ? Justifier.

Exercice 3. (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 2 + \ln(u_n^2 - 3).$$

On admet que cette suite est bien définie.

Partie A : Exploitation de programmes Python

1. Recopier et compléter le script Python ci-dessous pour que `suite(k)` qui prend en paramètre un entier naturel k, renvoie la liste des k premières valeurs de la suite (u_n).

Remarque : On précise que, pour tout réel strictement positif a, `log(a)` renvoie la valeur du logarithme népérien de a.

```
def suite(k):
    L = []
    u = 5
    for i in range(……):
        L.append(u)
        u= ……
    return(……)
```

2. On a exécuté `suite(9)` ci-dessous. Émettre deux conjectures : l'une sur le sens de variation de la suite (u_n) et l'autre sur son éventuelle convergence.

```
>>> suite(9)
[5, 5.091042453358316, 5.131953749864703,
  5.150037910978289, 5.157974010229213, 5.1614456706362954,
  5.162962248594583, 5.163624356938671, 5.163913344065642]
```

3. On a ensuite créé la fonction `mystere(n)` donnée ci-dessous et exécuté `mystere(10000)` ce qui a renvoyé 1.
   Cet affichage contredit-il la conjecture émise sur le sens de variation de la suite (u_n) ? Justifier.

```
def mystere(n):
    L = suite(n)
    c = 1
    for i in range(n - 1):
        if L[i] > L[i + 1]:
            c = 0
    return c
```

```
>>> mystere(10000)
1
```

Partie B : Étude de la convergence de la suite (u_n)

On considère la fonction g définie sur $[2\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = 2 + \ln(x^2 - 3)$$

On admet que g est dérivable sur $[2\ ;\ +\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Démontrer que la fonction g est croissante sur $[2\ ;\ +\infty[$.
2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :
$$4 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6.$$
b. En déduire que la suite (u_n) converge.

Partie C : Étude de la valeur de la limite

On considère la fonction f définie sur $[2\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 2 + \ln(x^2 - 3) - x.$$

On admet que f est dérivable sur $[2\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
On donne le tableau de variations de f suivant. On ne demande aucune justification.

x	2		3		$+\infty$
$f(x)$	0	↗	$\ln(6) - 1$	↘	$-\infty$

1. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur $[2\ ;\ +\infty[$ que l'on notera α et β avec $\alpha < \beta$.
b. Donner la valeur exacte de α et une valeur approchée à 10^{-3} près de β.

2. On note ℓ la limite de la suite (u_n).
Justifier que $f(\ell) = 0$ et déterminer ℓ.

Exercice 4. (5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x\ln(x)$.

Affirmation 1 :

$$\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4}$$

2. Soient n et k deux entiers naturels non nuls tels que $k \leq n$.

Affirmation 2 :

$$n \times \binom{n-1}{k-1} = k \times \binom{n}{k}$$

3. Pour les trois affirmations suivantes, on considère que l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Soit d la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t+1 \\ z = -t \end{cases}$, $t \in R$.

Soit d' la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2t'-1 \\ y = -t'+2 \\ z = t'+1 \end{cases}$, $t' \in R$.

Soit P le plan d'équation cartésienne : $2x + y - 2z + 18 = 0$.

Soit A le point de coordonnées $(-1 ; -3 ; 2)$ et B le point de coordonnées $(-5 ; -5 ; 6)$.

On appelle plan médiateur du segment [AB] le plan passant par le milieu du segment [AB] et orthogonal à la droite (AB).

Affirmation 3 : Le point A appartient à la droite d.

Affirmation 4 : Les droites d et d' sont sécantes.

Affirmation 5 : Le plan P est le plan médiateur du segment [AB].