CORRIGE BAC

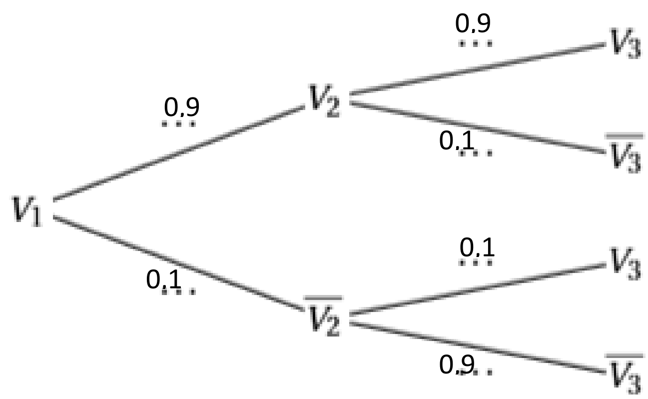
Année : 2025 **Matière :** Spé maths **Sujet :** Polynésie 2

Exercice 1 :

Partie A :

1.

a.



b.

Les événements V_2 et $\overline{V_2}$ forment un système complet d'événements (ou une partition de l'univers).
Donc, d'après la formule des probabilités totales :
$P(V_3) = P(V_3 \cap V_2) + P(V_3 \cap \overline{V_2}) = P(V_2)P_{V_2}(V_3) + P(\overline{V_2})P_{\overline{V_2}}(V_3)$.
Donc, $P(V_3) = 0{,}9 \times 0{,}9 + 0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}82$.
Ainsi, la probabilité pour que la troisième machine détienne la valeur 1 est de 0,82.

c.

On cherche $P_{V_3}(V_2)$.
Par définition, $P_{V_3}(V_2) = \frac{P(V_2 \cap V_3)}{P(V_3)} = \frac{P_{V_2}(V_3)P(V_2)}{P(V_3)}$.
Ainsi, $P_{V_3}(V_2) = \frac{0{,}9 \times 0{,}9}{0{,}82} \approx 0{,}988$.
La probabilité pour que la 2ème machine ait reçu la valeur 1 sachant que la troisième a reçu la valeur 1 est d'environ 0,988.

2.

a.

Soit $n \geq 1$.
Les événements V_n et $\overline{V_n}$ forment un système complet d'événements (ou une partition de l'univers).
Donc, d'après la formule des probabilités totales :
$p_{n+1} = P(V_{n+1} \cap V_n) + P(V_{n+1} \cap \overline{V_n}) = P_{V_n}(V_{n+1})P(V_n) + P_{\overline{V_n}}(V_{n+1})P(\overline{V_n})$.
Donc, $p_{n+1} = 0{,}9p_n + 0{,}1(1 - p_n)$.
Ainsi, pour tout $n \geq 1, p_{n+1} = 0{,}8p_n + 0{,}1$.

b.

Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 1, p_n = 0{,}5 \times 0{,}8^{n-1} + 0{,}5$.
<u>Initialisation :</u> $p_1 = 1$ d'après l'énoncé et $0{,}5 \times 0{,}8^{1-1} + 0{,}5 = 1$ donc $p_1 = 0{,}5 \times 0{,}8^{1-1} + 0{,}5$. La propriété est vraie au rang $k = 1$.
<u>Hérédité :</u> Soit $k \geq 1$ tel que la propriété soit vraie au rang k. Montrons qu'elle est vraie au rang $k + 1$.
D'après la question précédente, $p_{k+1} = 0{,}8p_k + 0{,}5$.
Or, d'après l'hypothèse de récurrence, $p_k = 0{,}5 \times 0{,}8^{k-1} + 0{,}1$.
Donc, $p_{k+1} = 0{,}8(0{,}5 \times 0{,}8^{k-1} + 0{,}5) + 0{,}1 = 0{,}8 \times 0{,}5 \times 0{,}8^{k-1} + 0{,}8 \times 0{,}5 + 0{,}1 = 0{,}5 \times 0{,}8^k + 0{,}5$.
Ainsi, la propriété est héréditaire.

Conclusion : La propriété est vraie au rang $k = 1$ et elle est héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie à tous les rangs.
Donc, pour tout $n \geq 1, p_n = 0{,}5 \times 0{,}8^{n-1} + 0{,}5$.

c.
$\lim_{n \to +\infty} 0{,}8^{n-1} = 0$ car $0 \leq 0{,}8 < 1$.
Donc, par produit puis par somme, $\lim_{n \to +\infty} p_n = 0{,}5$.
Ainsi, lorsque le numéro de la machine devient très grand, il y a une chance sur deux qu'elle détienne la valeur 1.

Partie B :

1.
L'instruction à la ligne 5 est un test qui fait appel à la fonction rand qui choisit un nombre aléatoire entre 0 inclus et 1 exclus. Si ce nombre est inférieur strictement à 0,1 (la probabilité pour que cela arrive est de 0,1), la ligne 6 est exécutée. Elle remplace alors donnee par 1-donnee, donc 0 est changé en 1 et 1 est changé en 0. Ces deux lignes caractérisent donc la possibilité aléatoire de transmission non fidèle qui intervient dans 10% des cas.

2.
La probabilité pour que simulation(4) renvoie la liste [1,1,1,1,1] est $P(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4 \cap V_5)$.
$P(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4 \cap V_5) = P_{V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4}(V_5)P(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4) = P_{V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4}(V_5)P_{V_1 \cap V_2 \cap V_3}(V_4)P(V_1 \cap V_2 \cap V_3)$ et ainsi de suite.
On trouve $P(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4 \cap V_5) = P_{V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4}(V_5)P_{V_1 \cap V_2 \cap V_3}(V_4)P_{V_1 \cap V_2}(V_3)P_{V_1}(V_2)P(V_1)$.
En continuant l'arbre pondéré de 1.a., on peut écrire :
$P(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4 \cap V_5) = 0{,}9 \times 0{,}9 \times 0{,}9 \times 0{,}9 \times 1 \approx 0{,}656$.
La probabilité pour que simulation(4) renvoie la liste [1,1,1,1,1] est d'environ 0,656.

La probabilité pour que simulation(6) renvoie la liste [1,0,1,0,0,1,1] est $P(V_1 \cap \overline{V_2} \cap V_3 \cap \overline{V_4} \cap \overline{V_5} \cap V_6 \cap V_7)$.
De la même manière que ci-dessus, on peut écrire que :
$P(V_1 \cap \overline{V_2} \cap V_3 \cap \overline{V_4} \cap \overline{V_5} \cap V_6 \cap V_7) =$
$P_{V_1 \cap \overline{V_2} \cap V_3 \cap \overline{V_4} \cap \overline{V_5} \cap V_6}(V_7)P_{V_1 \cap \overline{V_2} \cap V_3 \cap \overline{V_4} \cap \overline{V_5}}(V_6)P_{V_1 \cap \overline{V_2} \cap V_3 \cap \overline{V_4}}(\overline{V_5})P_{V_1 \cap \overline{V_2} \cap V_3}(\overline{V_4})P_{V_1 \cap \overline{V_2}}(V_3)P_{V_1}(\overline{V_2})P(V_1)$.
En continuant l'arbre pondéré de la question 1.a., on peut écrire :
$P(V_1 \cap \overline{V_2} \cap V_3 \cap \overline{V_4} \cap \overline{V_5} \cap V_6 \cap V_7) = 0{,}9 \times 0{,}1 \times 0{,}9 \times 0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}1 \times 1 = 8{,}1 \times 10^{-5}$ (≈ 0 si l'on respecte la consigne concernant les arrondis).
La probabilité pour que simulation(6) renvoie la liste [1,0,1,0,0,1,1] est environ égale à 0.

Exercice 2 :

1.
Par lecture graphique, il semble que f soit croissante sur $]2, +\infty[$, que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \to 2} f(x) = -\infty$. Ainsi, $\mathcal{C}_f$ admet pour asymptote verticale la droite d'équation $x = 2$.

2.
Pour tout $x \in]2, +\infty[, f(x) = 0 \Leftrightarrow x \ln(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $\ln(x-2) = 0$ (un produit est nul si et seulement si au moins l'un des facteurs est nul). $0 \notin]2, +\infty[$ donc cette solution est rejetée.
$\Leftrightarrow x - 2 = 1$ (en appliquant la fonction exponentielle).
$\Leftrightarrow x = 3$.
L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est $\{3\}$.

3.
$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} x - 2 = 0$ et $\lim_{X \to 0} \ln(X) = -\infty$ donc par composition, $\lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \ln(x-2) = -\infty$.

De plus, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} x = 2$.
Donc par produit, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f(x) = -\infty$.
Ce résultat est en accord avec la conjecture faire en question 1.

4.
Soit $h : x \mapsto \ln(x-2)$. On pose pour $x \in]2, +\infty[, u(x) = x - 2$.
Ainsi, pour tout $x \in]2, +\infty[, h(x) = \ln(u(x))$. Donc, g est dérivable sur $]2, +\infty[$ car u l'est et pour tout $x \in]2, +\infty[, h'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{x-2}$.
Donc, f est dérivable sur $]2, +\infty[$ en tant produit de fonctions dérivables.
Pour tout $x \in]2, +\infty[, f'(x) = \ln(x-2) + \frac{x}{x-2}$.

5.
a.
On réutilise la dérivation de la fonction h faite précédemment.
Ainsi, g est dérivable sur $]2, +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables.
Pour tout $x \in]2, +\infty[, g'(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{x-2-x}{(x-2)^2} = \frac{x-2-2}{(x-2)^2} = \frac{x-4}{(x-2)^2}$.

b.
Pour tout $x \in]2, +\infty[, \frac{1}{(x-2)^2} > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $x - 4$ sur $]2, +\infty[$.
Pour tout $x \in]2, +\infty[, x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$. On en déduit le signe de $x - 4$ (signe d'une fonction affine de coefficient directeur 1>0.

x	2		4		$+\infty$
Signe de $x-4$		-	0	+	
Signe de $g'(x)$	|	-	0	+	
Variations de g	| $+\infty$	↘	$\ln(2) + 2$	↗	$+\infty$

$g(4) = \ln(4-2) + \frac{4}{4-2} = \ln(2)+2$.

c.
On a $\ln(2) + 2 \approx 2,69 > 0$.
Or, d'après le tableau de variations ci-dessus, pour tout $x \in]2, +\infty[$, $g(x) \geq \ln(2) + 2$.
Donc, pour tout $x \in]2, +\infty[, g(x) > 0$.

d.
La fonction $g = f'$ est strictement positive sur $]2, +\infty[$ d'après la question précédente. Ainsi, la fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

6.
La fonction $f'' = g'$ est, d'après le tableau question 5b, positive sur $[4, +\infty[$ et négative sur $]2, 4]$. Ainsi, la fonction f est convexe sur $[4, +\infty[$ et concave sur $]2, 4]$.
La fonction f'' s'annule en changeant de signe en 4. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet donc pour point d'inflexion le point d'abscisse 4. $f(4) = 4\ln(4-2) = 4\ln(2)$. Les coordonnées de ce point sont donc $(4, 4\ln(2))$.

7. On cherche les solutions de l'équation $f'(x) = 3 \Leftrightarrow g(x) = 3$.

D’après le tableau de variations de la question 5b, la fonction g est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $]2,4[$. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} g(x) = +\infty$, $g(4) = \ln(2)+2$ et $3 \in]\ln(2)+2\,, +\infty[$ (on peut le vérifier avec la calculatrice).
Donc, d’après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l’équation $g(x) = 3$ admet une unique solution sur $]2,4[$.

La fonction g est continue (car dérivable) est strictement croissante sur $[4, +\infty[$.
$g(4) = \ln(2)+2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $3 \in [\ln(2)+2, +\infty[$.
Donc, d’après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l’équation $g(x) = 3$ admet une unique solution sur $[4, +\infty[$.

Les deux intervalles traités ci-dessus sont disjoints et leur union est $]2, +\infty[$. Donc, l’équation $g(x) = 3$ admet exactement deux solutions sur $]2, +\infty[$.
Ainsi, il existe exactement deux valeurs de x pour lesquelles $\mathcal{C}_f$ admet une tangente de coefficient directeur 3.

Exercice 3 :

1.

Montrons pour cela que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (-2, 1, 5)$ et $\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A) = (-1, -2, 0)$.
Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C définissent un plan.

2.

Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (-2) \times (-1) + 1 \times (-2) + 5 \times 0 = 0$ donc ces vecteurs sont orthogonaux. Ainsi, le triangle ABC est rectangle en A.

3.

a.

Montrons que $\vec{u}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ qui définissent le plan (ABC).
$\vec{u}.\overrightarrow{AB} = 2 \times (-2) - 1 \times 1 + 1 \times 5 = 0$ et $\vec{u}.\overrightarrow{AC} = 2 \times (-1) + (-1) \times (-2) + 1 \times 0 = 0$
Ainsi, $\vec{u}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$ donc la droite Δ est orthogonale au plan (ABC) car $\vec{u}$ en est un vecteur directeur.

b.

$\vec{u} = (2, -1, 1)$ est, d’après la question précédente, un vecteur normal au plan (ABC).
Donc, une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + z + d = 0$ où d est un réel à déterminer.
Le point C appartient au plan (ABC) donc vérifie l’équation cartésienne trouvée.
Ainsi, $2x_C - y_C + z_C + d = 0$ soit $-1 + d = 0$ d’où $d = 1$.
Donc, une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + z + 1 = 0$.

c.

La droite Δ a pour vecteur directeur $\vec{u} = (2, -1, 1)$ et passe par le point $D(-2, 2, 1)$ donc une représentation paramétrique de la droite Δ est :

$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 2 - t \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 + t \end{cases}$$

4.

Pour cela, montrons que H est le point d’intersection entre la droite Δ et le plan (ABC).

D'abord : $2x_H - y_H + z_H + 1 = 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{4}{3} + \frac{5}{3} + 1 = 0$ donc le point H appartient au plan (ABC).

Ensuite : cherchons $t \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x_H = -2 + 2t \\ y_H = 2 - t \\ z_H = 1 + t \end{cases}$.

$$\begin{cases} x_H = -2 + 2t \\ y_H = 2 - t \\ z_H = 1 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2}{3} = -2 + 2t \\ \frac{4}{3} = 2 - t \\ \frac{5}{3} = 1 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{3} \\ t = \frac{2}{3} \\ t = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Un tel t existe donc. Le point H appartient donc à la droite Δ. Cette droite n'étant pas incluse dans le plan (ABC) (elle lui est orthogonale), H est le point d'intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
Comme la droite Δ est orthogonale au plan (ABC) et passe par le point D, H est bien le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

5.

a.

$\overrightarrow{DH} = (x_H - x_D, y_H - y_D, z_H - z_D) = \left(-\frac{2}{3} + 2, \frac{4}{3} - 2, \frac{5}{3} - 1\right) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Donc, $DH = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{24}{9}} = \frac{\sqrt{4\times6}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

b.

Calculons l'aire de base ABC du tétraèdre. Le triangle ABC est rectangle en A donc, si l'on choisit AB comme base du triangle, la hauteur relative à cette base est AC.
Ainsi, $\mathcal{B} = \frac{AB\times AC}{2}$.
$AB = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{30}$ et $AC = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{5}$ (les coordonnées des vecteurs ont été déterminées à la question 1).
Donc, $\mathcal{B} = \frac{\sqrt{30}\times\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{150}}{2} = \frac{\sqrt{25\times6}}{2} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$.
La hauteur relative à cette base est DH car H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC) d'après la question 4.
Ainsi, $V = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times DH = \frac{1}{3} \times \frac{5\sqrt{6}}{2} \times \frac{2\sqrt{6}}{3}$ $\quad V = \frac{30}{9} = \frac{10}{3}$.

6.

La représentation paramétrique de la droite d donne accès à un vecteur directeur de cette droite qui est $\vec{v} = (-2, -3, 1)$.
$\vec{v}.\vec{u} = -2 \times 2 - 3 \times (-1) + 1 \times 1 = -4 + 3 + 1 = 0$. Donc, $\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ qui est lui-même orthogonal au plan (ABC). Donc, $\vec{v}$ est un vecteur du plan (ABC).
On en déduit que la droite d est parallèle au plan (ABC).

Exercice 4 :

Affirmation n°1 :
Cherchons le nombre de 3-uplets d'éléments distincts de E. Il y a ordre mais pas répétition.
Ainsi, le nombre de 3-uplets d'éléments distincts de E qui est de cardinal 7 est $\frac{7!}{(7-3)!}$.
$\frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = 210$. Il y a donc 210 3-uplets d'éléments distincts de E.
Le nombre de combinaisons de 4 éléments de F qui est de cardinal 10 est $\binom{10}{4}$.
$\binom{10}{4} = 210$. Il y a donc 210 combinaisons de 4 éléments de F.

$210 = 210$, donc il s'agit du même résultat.
Donc, l'affirmation est fausse.

Affirmation n°2 :
Le carré $ABCD$ a pour côté 3 donc son aire est $\mathcal{A}_{carré} = 3^2 = 9$.
La zone hachurée est l'aire comprise entre la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$. Son aire est donc :

$$\mathcal{A}_{hachurée} = \int_0^3 f(x)dx.$$

$$\mathcal{A}_{hachurée} = \int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9.$$

En effet, la fonction $x \mapsto \frac{x^3}{3}$ est une primitive de la fonction carré sur $[0,3]$.
On remarque que $\mathcal{A}_{carré} = \mathcal{A}_{hachurée}$. Donc, l'affirmation est vraie.

Affirmation n°3 :
Intégrons par parties.
On pose $u'(x) = x$ et $v(x) = \ln(x)$. La fonction v est dérivable sur $[1,2]$ et pour tout $x \in [1,2]$, $v'(x) = \frac{1}{x}$.
De plus, on peut choisir $u(x) = \frac{x^2}{2}$.
Les fonctions u et v sont continues (car dérivables) et à dérivée continue (car dérivable) sur $[1,2]$.
Donc, $\int_1^2 u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_1^2 - \int_1^2 u(x)v'(x)dx$
Ainsi, $J = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2x}dx = \frac{2^2}{2}\ln(2) - \frac{1^2}{2}\ln(1) - \int_1^2 \frac{x}{2}dx = 2\ln(2) - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2$ car la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{4}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{x}{2}$ sur $[1,2]$.
Ainsi, $J = 2\ln(2) - \frac{2^2}{4} + \frac{1^2}{4}$. $J = 2\ln(2) - \frac{3}{4}$. On trouve que $J \neq \frac{7}{11}$ (ce qui peut être vérifié avec la calculatrice).
Ainsi, l'affirmation est fausse.

Affirmation n°4 :
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
D'une part, pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x + 2e^{2x}$.
D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}, 2f(x) - e^x = 2e^x + 2e^{2x} - e^x = e^x + 2e^{2x}$.
On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2f(x) - e^x$.
Donc, f est solution de (E).
Ainsi, l'affirmation est vraie.

Affirmation n°5 :
Pour tout $n \in \mathbb{N}, -1 \leq \cos(n) \leq 1$.
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}, (x-1)e^n - 1 \leq u_n \leq (x-1)e^n + 1$ (on ajoute $(x-1)e^n$).
$\lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty$ et comme $0 \leq x < 1, -1 \leq x - 1 < 0$. Donc, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} (x-1)e^n = -\infty$.
Par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} (x-1)e^n + 1 = -\infty$.
Ainsi, d'après le théorème de comparaison (on peut laisser de côté le membre le plus à gauche de l'inégalité), $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
Donc, l'affirmation est vraie.