

Corrigé du bac général 2026

Spécialité Mathématiques – Amérique du Nord – Jour 1

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2026

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site sujetdebac.fr

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé maths au baccalauréat :
www.sujetdebac.fr/Annales/specialites/spe-mathematiques/

EXERCICE 1 (6 points)

Partie A

1. On complète d'abord les probabilités des trois abonnements :

$$P(E) = 0,25 \quad P(C) = 1 - 0,25 - 0,15 = 0,60 \quad P(F) = 0,15$$

Pour les branches issues de E et de C , on utilise directement les pourcentages donnés :

$$P_E(H) = 0,45 \quad P_E(\bar{H}) = 0,55$$

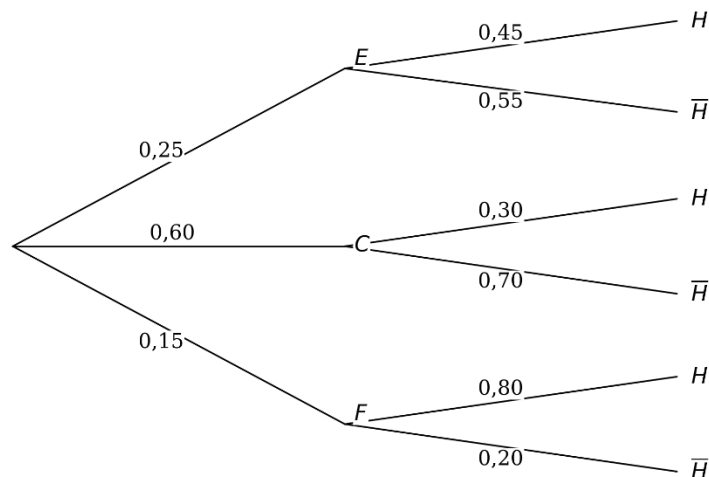
$$P_C(H) = 0,30 \quad P_C(\bar{H}) = 0,70$$

Pour les branches issues de F , on sait que $P(F \cap H) = 0,12$, donc :

$$P_F(H) = \frac{P(F \cap H)}{P(F)} = \frac{0,12}{0,15} = 0,80$$

$$P_F(\bar{H}) = 0,20$$

On obtient l'arbre complété :



2. On utilise la formule des probabilités composées :

$$P(E \cap H) = P(E) \times P_E(H) = 0,25 \times 0,45 = \frac{9}{80} = 0,1125$$

3. On additionne les probabilités des trois chemins menant à H (formule des probabilités totales) :

$$P(H) = P(E \cap H) + P(C \cap H) + P(F \cap H)$$

$$P(H) = 0,1125 + 0,60 \times 0,30 + 0,12$$

$$P(H) = 0,1125 + 0,18 + 0,12 = 0,4125$$

4. On cherche une probabilité conditionnelle :

$$P_H(E) = \frac{P(E \cap H)}{P(H)} = \frac{0,1125}{0,4125} = \frac{3}{11} \approx 0,273$$

Cela représente environ 27,3 %.

Partie B

1. La variable X compte, parmi 8 abonnés choisis indépendamment, le nombre de ceux ayant activé l'option. Chaque abonné a une probabilité 0,4125 d'avoir activé l'option.

Ainsi :

$$X \sim \mathcal{B}(8; 0,4125)$$

Les paramètres sont donc $n = 8$ et $p = 0,4125$.

2. Aucun des huit abonnés n'a activé l'option signifie $X = 0$.

Donc :

$$P(X = 0) = \binom{8}{0} (0,4125)^0 (1 - 0,4125)^8 = 0,5875^8$$

$$P(X = 0) \approx 0,014$$

Au millième, la probabilité vaut 0,014.

3. a. Pour un échantillon de n abonnés, la probabilité qu'aucun n'ait activé l'option est $0,5875^n$.

Donc la probabilité qu'au moins un abonné ait activé l'option est :

$$q_n = 1 - 0,5875^n$$

3. b. On cherche le plus petit entier naturel non nul n tel que :

$$q_n \geq 0,999$$

$$1 - 0,5875^n \geq 0,999$$

$$0,5875^n \leq 0,001$$

En passant au logarithme, le sens de l'inégalité ne change pas car la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0; +\infty[$:

$$\ln(0,5875^n) \leq \ln(0,001)$$

$$n \ln(0,5875) \leq \ln(0,001)$$

Comme $\ln(0,5875) < 0$, le sens de l'inégalité change :

$$n \geq \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,5875)}$$

$$\frac{\ln(0,001)}{\ln(0,5875)} \approx 12,987$$

Le plus petit entier possible est donc 13.

Partie C

1. Les montants possibles sont ceux des trois abonnements, avec ou sans l'option à 2 euros :

$$\begin{array}{ccc} 5 & 10 & 16 \\ 5 + 2 = 7 & 10 + 2 = 12 & 16 + 2 = 18 \end{array}$$

2. On utilise les probabilités obtenues dans l'arbre de la partie A.

$$P(Y = 5) = P(E \cap \bar{H}) = P(E) \times P_E(\bar{H}) = 0,25 \times 0,55 = 0,1375 = \frac{11}{80}$$

$$P(Y = 7) = P(E \cap H) = P(E) \times P_E(H) = 0,25 \times 0,45 = 0,1125 = \frac{9}{80}$$

$$P(Y = 10) = P(C \cap \bar{H}) = P(C) \times P_C(\bar{H}) = 0,60 \times 0,70 = 0,42 = \frac{21}{50}$$

$$P(Y = 12) = P(C \cap H) = P(C) \times P_C(H) = 0,60 \times 0,30 = 0,18 = \frac{9}{50}$$

$$P(Y = 16) = P(F \cap \bar{H}) = P(F) \times P_F(\bar{H}) = 0,15 \times 0,20 = 0,03 = \frac{3}{100}$$

$$P(Y = 18) = P(F \cap H) = 0,12 = \frac{3}{25}$$

On obtient ainsi la loi de probabilité suivante :

y_i	5	7	10	12	16	18
$P(Y = y_i)$	0,1375	0,1125	0,42	0,18	0,03	0,12

3. On calcule l'espérance :

$$E(Y) = 5 \times 0,1375 + 7 \times 0,1125 + 10 \times 0,42 + 12 \times 0,18 + 16 \times 0,03 + 18 \times 0,12$$

$$E(Y) = 10,475$$

Cela signifie que, sur un grand nombre d'abonnés, le montant moyen payé chaque mois serait d'environ 10,48 euros.

4. À la calculatrice, ou en utilisant $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$, on obtient :

$$E(Y^2) = 5^2 \times 0,1375 + 7^2 \times 0,1125 + 10^2 \times 0,42 + 12^2 \times 0,18 + 16^2 \times 0,03 + 18^2 \times 0,12$$

$$E(Y^2) = 123,43$$

Donc :

$$V(Y) = 123,43 - 10,475^2 \approx 13,70$$

La variance de Y , arrondie au centième, est 13,70.

5. a. L'écart-type de Z vaut 2, donc :

$$V(Z) = \sigma(Z)^2 = 2^2 = 4$$

5. b. L'intervalle $]6 ; 12[$ est centré en 9, avec un écart de 3 de chaque côté.

On cherche donc :

$$P(6 < Z < 12) = P(|Z - 9| < 3)$$

Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|Z - 9| \geq 3) \leq \frac{V(Z)}{3^2} = \frac{4}{9}$$

Donc :

$$P(|Z - 9| < 3) \geq 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

Or :

$$\frac{5}{9} \approx 0,556 > 0,50$$

Il y a donc bien au moins 50 % de chances que le prix de l'abonnement soit strictement compris entre 6 et 12 euros. L'affirmation est justifiée.

EXERCICE 2 (4 points)

Partie A : étude d'un modèle discret

1. On calcule :

$$u_1 = 4 - \frac{4}{u_0} = 4 - \frac{4}{4} = 3$$

La suite (u_n) est exprimée en milliers d'individus. Le modèle donne donc 3 milliers d'individus, c'est-à-dire 3000 perches-soleil au 1er janvier 2026.

2. a. La fonction h est dérivable sur $]0; +\infty[$:

$$h'(x) = 0 - 4 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{4}{x^2}$$

Or, pour tout $x > 0$, on a :

$$\frac{4}{x^2} > 0$$

Donc la fonction h est croissante sur $]0; +\infty[$.

2. b. On applique un raisonnement par récurrence.

Initialisation :

On sait que $u_0 = 4$ et $u_1 = 3$.

On a donc :

$$2 \leq u_1 \leq u_0 \leq 4$$

La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité :

Soit n un entier naturel. On suppose que :

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$$

Comme h est croissante sur $]0; +\infty[$, on peut appliquer h à l'inégalité :

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

On obtient :

$$h(2) \leq h(u_{n+1}) \leq h(u_n)$$

Or :

$$h(2) = 4 - \frac{4}{2} = 2 \quad \text{et} \quad h(u_{n+1}) = u_{n+2} \quad \text{et} \quad h(u_n) = u_{n+1}$$

Donc :

$$2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

Et d'après l'hypothèse de récurrence, on a :

$$u_{n+1} \leq 4$$

Ainsi :

$$2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 4$$

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion :

Par récurrence, pour tout entier naturel n , on a :

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$$

2. c. D'après la question précédente, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 2. Elle est donc convergente.

On note ℓ sa limite.

2. d. Comme la suite (u_n) converge vers ℓ , la suite (u_{n+1}) converge aussi vers ℓ . En passant à la limite dans la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 4 - \frac{4}{u_n}$$

on obtient :

$$\ell = 4 - \frac{4}{\ell}$$

Comme $\ell \geq 2$, on a $\ell > 0$, donc on peut multiplier par ℓ :

$$\ell^2 = 4\ell - 4$$

$$\ell^2 - 4\ell + 4 = 0$$

$$(\ell - 2)^2 = 0$$

$$\ell = 2$$

2. e. Le modèle prévoit que la population tend vers 2 milliers d'individus, c'est-à-dire 2 000 perches-soleil. Il ne prévoit donc pas une élimination à long terme de l'espèce envahissante.

3. a. Le script complété est :

```
def population(s) :  
    u = 4  
    n = 0  
    while u >= s :  
        u = 4 - 4 / u  
        n = n + 1  
    return n
```

La condition $u \geq s$ permet de continuer tant que l'on n'a pas encore obtenu $u_n < s$.

3. b. On calcule quelques termes :

$$u_0 = 4 \quad u_1 = 3 \quad u_2 = \frac{8}{3} \quad u_3 = \frac{5}{2} \quad u_4 = \frac{12}{5}$$

Puis :

$$u_5 = \frac{7}{3} \quad u_6 = \frac{16}{7} \quad u_7 = \frac{9}{4} \quad u_8 = \frac{20}{9} \quad u_9 = \frac{11}{5} = 2,2$$

Comme on cherche $u_n < 2,2$, le rang 9 ne convient pas encore. On calcule :

$$u_{10} = 4 - \frac{4}{11/5} = \frac{24}{11} \approx 2,18$$

La commande `population(2.2)` renvoie donc 10.

Cela signifie que, selon ce modèle, le nombre de perches-soleil devient strictement inférieur à 2 200 individus pour la première fois au 1er janvier 2025 + 10, donc au 1er janvier 2035.

Partie B : étude d'un modèle continu

1. L'équation différentielle est :

$$y' + y = 2$$

Les solutions de l'équation homogène $y' + y = 0$ sont les fonctions de la forme :

$$t \mapsto Ce^{-t}$$

Une solution particulière de l'équation $y' + y = 2$ est la fonction constante égale à 2.

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est :

$$y(t) = Ce^{-t} + 2$$

où C est une constante réelle.

2. On sait que $p(0) = 4$.

Or :

$$p(t) = Ce^{-t} + 2$$

Donc :

$$p(0) = C + 2$$

$$4 = C + 2$$

$$C = 2$$

Ainsi, pour tout $t \geq 0$, on a :

$$p(t) = 2e^{-t} + 2$$

3. Lorsque t tend vers $+\infty$, on a :

$$e^{-t} \rightarrow 0$$

Donc :

$$p(t) = 2e^{-t} + 2 \rightarrow 2$$

Ce modèle prévoit donc que la population tend vers 2 milliers d'individus, c'est-à-dire 2 000 perches-soleil.

Comme dans le modèle discret, la population ne tend pas vers 0. Donc ce modèle continu ne prévoit pas une élimination à long terme de l'espèce envahissante.

EXERCICE 3 (5 points)

Partie A

1. Dans le repère donné, le carré $ABCD$ est dans le plan $z = 0$. On connaît déjà :

$$B(-1; 1; 0) \quad C(1; 1; 0)$$

Comme le carré est centré en O , on obtient :

$$A(-1; -1; 0) \quad D(1; -1; 0)$$

2. On calcule d'abord les coordonnées des vecteurs :

$$\overrightarrow{SC} = C - S = (1; 1; -2)$$

$$\overrightarrow{SB} = B - S = (-1; 1; -2)$$

Donc :

$$\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB} = 1 \times (-1) + 1 \times 1 + (-2) \times (-2) = -1 + 1 + 4 = 4$$

3. On utilise la formule du produit scalaire :

$$\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB} = SC \times SB \times \cos(\widehat{BSC})$$

Or :

$$SC = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

$$SB = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

Ainsi :

$$4 = \sqrt{6} \times \sqrt{6} \times \cos(\widehat{BSC})$$

$$4 = 6 \cos(\widehat{BSC})$$

$$\cos(\widehat{BSC}) = \frac{2}{3}$$

À la calculatrice :

$$\widehat{BSC} = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) \approx 48,2^\circ$$

Partie B

1. a. Pour montrer que \vec{n} est normal au plan (SBC) , il suffit de vérifier qu'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

On prend :

$$\overrightarrow{BC} = (2; 0; 0)$$

$$\overrightarrow{BS} = S - B = (1; -1; 2)$$

Avec $\vec{n} = (0; 2; 1)$, on a :

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \times 2 + 2 \times 0 + 1 \times 0 = 0$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BS} = 0 \times 1 + 2 \times (-1) + 1 \times 2 = 0$$

Le vecteur \vec{n} est donc orthogonal à deux directions du plan (SBC) . Il est donc normal à ce plan.

1. b. Comme $\vec{n} = (0; 2; 1)$ est un vecteur normal au plan, une équation cartésienne du plan (SBC) est de la forme :

$$2y + z + d = 0$$

Le point $C(1; 1; 0)$ appartient au plan, donc :

$$2 \times 1 + 0 + d = 0$$

$$\Leftrightarrow d = -2$$

Une équation cartésienne du plan (SBC) est donc :

$$2y + z - 2 = 0$$

2. a. Le point H est le projeté orthogonal de O sur le plan (SBC). La droite (OH) est donc perpendiculaire au plan (SBC), donc elle a pour vecteur directeur $\vec{n} = (0; 2; 1)$.

Comme elle passe par $O(0; 0; 0)$, une représentation paramétrique de (OH) est :

$$\begin{cases} x = 0 + 0t = 0 \\ y = 0 + 2t = 2t \\ z = 0 + t = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

2. b. Le point H appartient à la fois à la droite (OH) et au plan (SBC). On remplace donc x, y, z par les expressions précédentes dans l'équation du plan :

$$2(2t) + t - 2 = 0$$

$$5t - 2 = 0$$

$$t = \frac{2}{5}$$

Donc :

$$H\left(0; \frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right)$$

2. c. La distance du point O au plan (SBC) est la longueur OH .

$$OH = \sqrt{(0-0)^2 + \left(\frac{4}{5}-0\right)^2 + \left(\frac{2}{5}-0\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{20}{25}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

La distance du point O au plan (SBC) est donc :

$$\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ cm}$$

Partie C

1. a. La base $ABCD$ est un carré de côté 2, donc son aire vaut :

$$2^2 = 4$$

Par ailleurs, la hauteur de la pyramide est $OS = 2$.

Ainsi :

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3} \times 4 \times 2 = \frac{8}{3}$$

Le volume de la pyramide $SABCD$ est donc :

$$\frac{8}{3} \text{ cm}^3$$

1. b. Le triangle OCB représente un quart du carré $ABCD$. Les pyramides $OCBS$ et $SABCD$ ont la même hauteur issue de S , donc le volume de $OCBS$ est le quart de celui de $SABCD$.

$$V_{OCBS} = \frac{1}{4} \times \frac{8}{3} = \frac{2}{3}$$

Le volume de la pyramide $OCBS$ est donc :

$$\frac{2}{3} \text{ cm}^3$$

2. Dans le triangle SBC , on a :

$$BC = 2$$

Le point J est le milieu de $[BC]$. De plus, SJ est une hauteur du triangle SBC , car \vec{SJ} est orthogonal à \vec{BC} .

On a :

$$J(0; 1; 0)$$

On calcule :

$$SJ = \sqrt{(0-0)^2 + (1-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{5}$$

Donc l'aire du triangle SBC vaut :

$$\mathcal{A}_{SBC} = \frac{1}{2} \times BC \times SJ$$

$$\mathcal{A}_{SBC} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{5} = \sqrt{5}$$

3. On considère maintenant la pyramide $OCBS$, dont la base est le triangle SBC . Sa hauteur est la distance cherchée entre O et le plan (SBC) . Notons cette distance d .

On a donc :

$$V_{OCBS} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{SBC} \times d$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times \sqrt{5} \times d$$

$$2 = \sqrt{5} d$$

$$d = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

On retrouve bien que la distance du point O au plan (SBC) est :

$$\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ cm}$$

EXERCICE 4 (5 points)

1. D'après la courbe, la fonction semble :

- convexe sur $[-\infty; 1]$, elle est tournée vers le haut et au-dessus de ses tangentes.
- concave sur $[1; +\infty[$, elle est tournée vers le bas en-dessous de ses tangentes.

2. Quand x tend vers $-\infty$, on a $x^2 + 1 \rightarrow +\infty$, donc $\ln(x^2 + 1) \rightarrow +\infty$ par composition avec la fonction logarithme.

De plus, $-3x \rightarrow +\infty$.

Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

3. a. Pour $x > 0$, on écrit :

$$x^2 + 1 = x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

Donc :

$$\ln(x^2 + 1) = \ln\left(x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right) = 2 \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

Ainsi :

$$f(x) = 5 \left(2 \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right) - 3x$$

$$f(x) = 10 \ln x - 3x + 5 \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$f(x) = x \left(\frac{10 \ln x}{x} - 3\right) + 5 \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

3. b. On utilise l'expression issue de la question précédente.

D'après les croissances comparées, on sait que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{10 \ln x}{x} - 3\right) = -3$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{10 \ln x}{x} - 3\right) = -\infty$$

De plus,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \ln(1) = 0$$

On en déduit finalement :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

4. a. Pour tout réel x , on a :

$$f'(x) = 5 \times \frac{2x}{x^2 + 1} - 3$$

$$f'(x) = \frac{10x}{x^2 + 1} - 3$$

$$f'(x) = \frac{10x - 3(x^2 + 1)}{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = \frac{-3x^2 + 10x - 3}{x^2 + 1}$$

4. b. Comme $x^2 + 1 > 0$ pour tout réel x , le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur :

$$-3x^2 + 10x - 3$$

On résout :

$$-3x^2 + 10x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0$$

Calcul du discriminant :

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 3 \times 3 = 64$$

Les racines sont donc :

$$x_1 = \frac{10 - 8}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{10 + 8}{6} = 3$$

Le coefficient dominant du trinôme $-3x^2 + 10x - 3$ est négatif, donc ce trinôme est négatif à l'extérieur des racines et positif entre les racines.

Ainsi, f est décroissante sur $] -\infty; \frac{1}{3}]$, croissante sur $[\frac{1}{3}; 3]$, puis décroissante sur $[3; +\infty[$.

On peut préciser les valeurs aux changements de variation :

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 5 \ln\left(\frac{10}{9}\right) - 1 \quad \text{et} \quad f(3) = 5 \ln(10) - 9$$

On obtient le tableau de variations complet :

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	3	$+\infty$	
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
Variations de f	$+\infty$	$5 \ln\left(\frac{10}{9}\right) - 1$	$5 \ln(10) - 9$	$-\infty$	

5. a. Pour tout réel x ,

$$f''(x) = \frac{-10x^2 + 10}{(x^2 + 1)^2} = \frac{10(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$$

Le dénominateur est toujours strictement positif. Le signe de $f''(x)$ est donc celui de $1 - x^2$.

Ainsi, $f''(x) \geq 0$ sur $[-1; 1]$, et $f''(x) \leq 0$ sur $] -\infty; -1]$ et sur $[1; +\infty[$.

La fonction f est donc et concave sur $] -\infty; -1]$, convexe sur $[-1; 1]$, puis à nouveau concave sur $[1; +\infty[$.

La conjecture faite à la question 1 est donc rejetée, car f est concave sur $] -\infty; -1]$.

5. b. Le point A a pour abscisse 1. On calcule :

$$f(1) = 5 \ln(2) - 3 \quad \text{et} \quad f'(1) = \frac{-3 + 10 - 3}{2} = 2$$

L'équation de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1 est donc :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$y = 2(x - 1) + 5 \ln(2) - 3$$

$$y = 2x + 5 \ln(2) - 5$$

5. c. Sur l'intervalle $[1; +\infty[$, la fonction f est concave. Sa courbe représentative est donc située en dessous de chacune de ses tangentes, en particulier de la tangente au point d'abscisse 1.

Ainsi, pour tout $x \geq 1$:

$$f(x) \leq 2x + 5 \ln(2) - 5$$

C'est-à-dire :

$$5 \ln(x^2 + 1) - 3x \leq 2x + 5 \ln(2) - 5$$

$$\Leftrightarrow 5 \ln(x^2 + 1) \leq 5x + 5 \ln(2) - 5$$

En divisant par 5, on obtient bien, pour tout $x \geq 1$:

$$\ln(x^2 + 1) \leq x + \ln(2) - 1$$

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé maths au baccalauréat :

www.sujetdebac.fr/Annales/specialites/spe-mathematiques/