

# Corrigé du bac général 2026

## Spécialité Mathématiques – Amérique du Nord – Jour 2

### BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2026

### MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

*L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.*

*L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.*

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site [sujetdebac.fr](http://sujetdebac.fr)

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé maths au baccalauréat :  
[www.sujetdebac.fr/Annales/specialites/spe-mathematiques/](http://www.sujetdebac.fr/Annales/specialites/spe-mathematiques/)

## EXERCICE 1 (4 points)

### Partie A

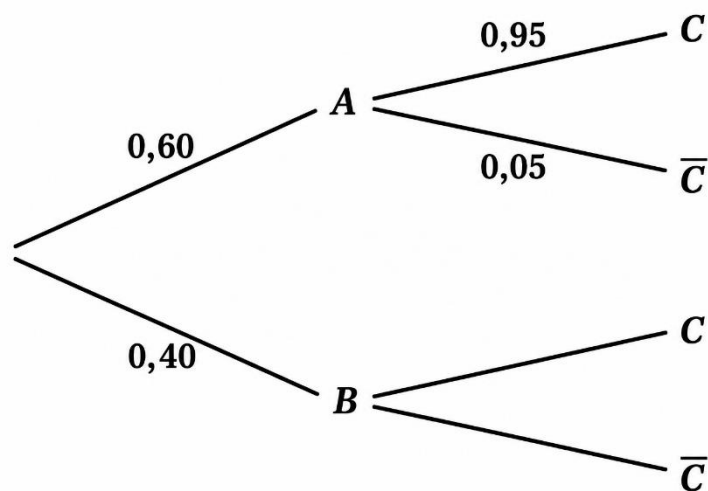
1. On connaît directement :

$$P(A) = 0,60 \quad \text{et} \quad P(B) = 0,40$$

Parmi les tomates du fournisseur A :

$$P_A(C) = 0,95 \quad \text{et} \quad P_A(\bar{C}) = 0,05$$

Ce qui donne l'arbre complété suivant :



2. a. On cherche la probabilité que la tomate soit à la fois commercialisable et issue du fournisseur A.

$$P(A \cap C) = P(A) \times P_A(C)$$

$$P(A \cap C) = 0,60 \times 0,95 = 0,57$$

La probabilité cherchée est donc égale à 0,57.

2. b. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(C) = P(A \cap C) + P(B \cap C)$$

Or :

$$P(C) = 0,91$$

et :

$$P(A \cap C) = 0,57$$

Donc :

$$0,91 = 0,57 + P(B) \times P_B(C)$$

$$0,91 = 0,57 + 0,40 \times P_B(C)$$

$$0,34 = 0,40 \times P_B(C)$$

$$P_B(C) = \frac{0,34}{0,40} = 0,85$$

Ainsi :

$$P_B(C) = 0,85$$

**2. c.** On cherche si, sachant que la tomate est non commercialisable, elle a deux fois moins de chance de provenir de A que de B.

On calcule d'abord les probabilités :

$$P(A \cap \bar{C}) = P(A) \times P_A(\bar{C}) = 0,60 \times 0,05 = 0,03$$

et :

$$P(B \cap \bar{C}) = P(B) \times P_B(\bar{C}) = 0,40 \times 0,15 = 0,06$$

On sait aussi que :

$$P(\bar{C}) = 1 - 0,91 = 0,09$$

Donc :

$$P_{\bar{C}}(A) = \frac{P(A \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{0,03}{0,09} = \frac{1}{3}$$

et :

$$P_{\bar{C}}(B) = \frac{P(B \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{0,06}{0,09} = \frac{2}{3}$$

On a bien :

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$$

Le responsable des achats a donc raison.

## **Partie B**

**1. a.** Chaque tomate a une probabilité 0,09 d'être non commercialisable. On prélève 15 tomates de manière indépendante.

Ainsi, la variable aléatoire  $X$  suit une loi binomiale de paramètres :

$$n = 15 \quad \text{et} \quad p = 0,09$$

On peut écrire :

$$X \sim \mathcal{B}(15; 0,09)$$

**1. b.** On cherche :

$$P(X = 2)$$

Avec la formule de la loi binomiale :

$$P(X = 2) = \binom{15}{2} \times 0,09^2 \times 0,91^{13} \approx 0,249581$$

Arrondie au millième, la probabilité vaut :

$$P(X = 2) \approx 0,250$$

**1. c.** On cherche :

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$P(X \leq 2) = 0,91^{15} + \binom{15}{1} \times 0,09 \times 0,91^{14} + \binom{15}{2} \times 0,09^2 \times 0,91^{13} \approx 0,853096$$

Arrondie au millième :

$$P(X \leq 2) \approx 0,853$$

**2. a.** On a :

$$F_n = \frac{X_n}{n}$$

Comme  $X_n$  suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $0,09$ , on sait que :

$$E(X_n) = 0,09n$$

et :

$$V(X_n) = n \times 0,09 \times (1 - 0,09) = 0,0819n$$

Donc :

$$E(F_n) = E\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{E(X_n)}{n} = \frac{0,09n}{n} = 0,09$$

Pour la variance :

$$V(F_n) = V\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} V(X_n) = \frac{0,0819n}{n^2} = \frac{0,0819}{n}$$

**2. b.** L'inégalité :

$$0,04 < F_n < 0,14$$

revient à dire que  $F_n$  est à moins de 0,05 de son espérance 0,09 :

$$|F_n - 0,09| < 0,05$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|F_n - E(F_n)| \geq 0,05) \leq \frac{V(F_n)}{0,05^2}$$

Or on a vu que :

$$E(F_n) = 0,09 \quad \text{et} \quad V(F_n) = \frac{0,0819}{n}$$

Donc :

$$P(|F_n - 0,09| \geq 0,05) \leq \frac{\frac{0,0819}{n}}{0,0025}$$

$$P(|F_n - 0,09| \geq 0,05) \leq \frac{32,76}{n}$$

En passant à l'évènement contraire :

$$P(|F_n - 0,09| < 0,05) \geq 1 - \frac{32,76}{n}$$

Ainsi :

$$P(0,04 < F_n < 0,14) \geq 1 - \frac{32,76}{n}$$

L'inégalité demandée avec le signe strict est donc obtenue dans le cadre de cette estimation probabiliste.

**2. c.** On a un échantillon de 500 tomates :  $n = 500$ .

Le responsable observe 55 tomates non commercialisables, donc la fréquence observée est :

$$f = \frac{55}{500} = 0,11$$

On compare cette fréquence à l'intervalle étudié dans la question précédente :

$$0,04 < 0,11 < 0,14$$

De plus, pour  $n = 500$  :

$$1 - \frac{32,76}{500} = 0,93448$$

La probabilité que la fréquence de tomates non commercialisables soit comprise entre 0,04 et 0,14 est donc supérieure à environ 0,934.

La fréquence observée 0,11 appartient à cet intervalle. Le résultat est donc conforme à ce que le responsable pouvait attendre.

## EXERCICE 2 (6 points)

### Partie A

1. On résout :

$$\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} = x$$

On regroupe tout dans un même membre :

$$x \left( \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} - 1 \right) = 0$$

Donc :

$$x = 0$$

ou bien :

$$\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} = 1$$

Comme la racine carrée est positive :

$$\sqrt{1+x^2} = 2$$

$$1+x^2 = 4$$

$$x^2 = 3$$

$$x = -\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{3}$$

Les solutions de l'équation sont donc :

$$\{-\sqrt{3}; 0; \sqrt{3}\}$$

2. a. On écrit :

$$f(x) = 2x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Donc :

$$f'(x) = 2(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} + 2x \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times 2x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{2x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

On met au même dénominateur :

$$f'(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

2. b. Pour tout réel  $x$ , on a :

$$1+x^2 > 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{1+x^2} > 0$$

Donc :

$$(1+x^2)\sqrt{1+x^2} > 0$$

Ainsi :

$$f'(x) > 0$$

La fonction  $f$  est donc strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

## **Partie B**

1. On va montrer la propriété suivante avec un raisonnement par récurrence.

$$1 \leq u_n \leq u_{n+1} < \sqrt{3}$$

Initialisation :

On a :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_1 = f(u_0) = f(1) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Donc :

$$1 \leq u_0 \leq u_1 < \sqrt{3}$$

La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité :

On suppose que, pour un certain entier naturel  $n$ , on a :

$$1 \leq u_n \leq u_{n+1} < \sqrt{3}$$

Il suffit alors de montrer que :

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < \sqrt{3}$$

Comme  $u_{n+1} \in [1; \sqrt{3}[$ , on a déjà :

$$1 \leq u_{n+1}$$

De plus, sur l'intervalle  $[1; \sqrt{3}]$ , on a pour tout  $x > 0$  :

$$f(x) \geq x$$

En effet :

$$\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \geq x$$

équivalent, puisque  $x > 0$ , à :

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} &\geq 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} &\leq 2 \\ \Leftrightarrow 1+x^2 &\leq 4 \\ \Leftrightarrow x^2 &\leq 3 \end{aligned}$$

Donc :

$$u_{n+2} = f(u_{n+1}) \geq u_{n+1}$$

Enfin, comme  $f$  est strictement croissante et que  $u_{n+1} < \sqrt{3}$ , on obtient :

$$u_{n+2} = f(u_{n+1}) < f(\sqrt{3})$$

Or :

$$f(\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{1+3}} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Donc :

$$u_{n+2} < \sqrt{3}$$

La propriété est héréditaire.

Conclusion : Par récurrence, pour tout entier naturel  $n$  :

$$1 \leq u_n \leq u_{n+1} < \sqrt{3}$$

2. D'après la question précédente, la suite  $(u_n)$  est croissante et majorée par  $\sqrt{3}$ . Elle est donc convergente. On note  $\ell$  sa limite.

Comme  $u_n \geq 1$ , on a :

$$\ell \geq 1$$

La fonction  $f$  étant continue sur  $\mathbb{R}$ , on peut passer à la limite dans la relation :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

On obtient :

$$\ell = f(\ell)$$

D'après la partie A, les solutions de l'équation  $f(x) = x$  sont :

$$\{-\sqrt{3}; 0; \sqrt{3}\}$$

Comme  $\ell \geq 1$ , la seule limite possible est :

$$\ell = \sqrt{3}$$

La suite  $(u_n)$  converge donc vers  $\sqrt{3}$ .

3. a. On commence par calculer  $u_{n+1}^2$  :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}$$

Donc :

$$u_{n+1}^2 = \frac{4u_n^2}{1+u_n^2}$$

Alors :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}^2}{3 - u_{n+1}^2} = \frac{\frac{4u_n^2}{1+u_n^2}}{3 - \frac{4u_n^2}{1+u_n^2}}$$

On simplifie le dénominateur :

$$3 - \frac{4u_n^2}{1+u_n^2} = \frac{3(1+u_n^2) - 4u_n^2}{1+u_n^2} = \frac{3 - u_n^2}{1+u_n^2}$$

Donc :

$$v_{n+1} = \frac{\frac{4u_n^2}{1+u_n^2}}{\frac{3 - u_n^2}{1+u_n^2}} = \frac{4u_n^2}{3 - u_n^2} = 4v_n$$

La suite  $(v_n)$  est donc géométrique de raison 4.

Son premier terme est :

$$v_0 = \frac{u_0^2}{3 - u_0^2} = \frac{1}{3 - 1} = \frac{1}{2}$$

**3. b.** Comme  $(v_n)$  est géométrique de raison 4 et de premier terme  $\frac{1}{2}$ , on a :

$$v_n = \frac{1}{2} \times 4^n$$

Or :

$$v_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}$$

Donc :

$$\frac{u_n^2}{3 - u_n^2} = \frac{1}{2} \times 4^n$$

On résout cette équation pour obtenir  $u_n^2$  :

$$u_n^2 = \left(\frac{1}{2} \times 4^n\right) (3 - u_n^2)$$

$$u_n^2 = \frac{3}{2} \times 4^n - \frac{1}{2} \times 4^n u_n^2$$

$$u_n^2 \left(1 + \frac{1}{2} \times 4^n\right) = \frac{3}{2} \times 4^n$$

$$u_n^2 = \frac{1,5 \times 4^n}{1 + 0,5 \times 4^n}$$

Comme  $u_n > 0$ , on obtient :

$$u_n = \sqrt{\frac{1,5 \times 4^n}{1 + 0,5 \times 4^n}}$$

**3. c.** D'après la question précédente :

$$u_n^2 = \frac{1,5 \times 4^n}{1 + 0,5 \times 4^n}$$

En divisant le numérateur et le dénominateur par  $4^n$ , on obtient :

$$u_n^2 = \frac{1,5}{\frac{1}{4^n} + 0,5}$$

Lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , on a :

$$\frac{1}{4^n} \rightarrow 0$$

Donc :

$$u_n^2 \rightarrow \frac{1,5}{0,5} = 3$$

Comme  $u_n > 0$ , on en déduit :

$$u_n \rightarrow \sqrt{3}$$

On retrouve bien le résultat de la question 2.

### **Partie C**

1. Le script complété est :

```
from math import *  
  
def termes(p) :  
    u = 1  
    S = 0  
    L = []  
    for i in range(p):  
        S = S + u**2  
        u = 2*u / sqrt(1 + u**2)  
        L.append(S)  
    return L
```

À chaque passage dans la boucle, on ajoute le terme  $u_i^2$  à la somme, puis on calcule le terme suivant de la suite ( $u_n$ ).

2. On sait que, pour tout entier naturel  $k$  :

$$1 \leq u_k \leq \sqrt{3}$$

En élevant au carré, comme les termes sont positifs :

$$1 \leq u_k^2 \leq 3$$

Or :

$$S_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_{n-1}^2$$

Cette somme contient  $n$  termes, chacun compris entre 1 et 3. Donc :

$$n \leq S_n \leq 3n$$

3. Comme :

$$n \leq S_n \quad \text{et} \quad n \rightarrow +\infty$$

on obtient par comparaison :

$$S_n \rightarrow +\infty$$

Ensuite, à partir de :

$$n \leq S_n \leq 3n$$

on divise par  $n^2 > 0$  :

$$\frac{1}{n} \leq \frac{S_n}{n^2} \leq \frac{3}{n}$$

Or :

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{3}{n} \rightarrow 0$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\frac{S_n}{n^2} \rightarrow 0$$

### EXERCICE 3 (5 points)

1. La droite  $\Delta$  a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Pour  $t = 0$ , on obtient :

$$(1; 1; 1)$$

Donc la droite  $\Delta$  passe bien par le point  $C$ .

Vérifions si elle passe par  $A(4; 2; 2)$ .

Il faudrait avoir :

$$1 + 2t = 4$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{3}{2}$$

Mais alors :

$$1 + t = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

Or  $\frac{5}{2} \neq 2$ . Les coordonnées ne correspondent donc pas toutes au même paramètre  $t$ .

La droite  $\Delta$  ne passe donc pas par  $A$ .

**2. a.** La droite  $\Delta$  a pour vecteur directeur :

$$\vec{u} = (2; 1; 2)$$

Comme le plan  $P$  est perpendiculaire à  $\Delta$ , le vecteur  $\vec{u}$  est un vecteur normal au plan  $P$ .

Une équation cartésienne de  $P$  est donc de la forme :

$$2x + y + 2z + d = 0$$

Le plan passe par  $A(4; 2; 2)$ , donc :

$$2 \times 4 + 2 + 2 \times 2 + d = 0$$

$$8 + 2 + 4 + d = 0$$

$$d = -14$$

Ainsi, une équation cartésienne du plan  $P$  est :

$$2x + y + 2z - 14 = 0$$

**2. b.** Pour le point  $B(5; -2; 3)$ , on calcule :

$$2 \times 5 + (-2) + 2 \times 3 - 14 = 10 - 2 + 6 - 14 = 0$$

Donc  $B$  appartient au plan  $P$ .

Pour le point  $C(1; 1; 1)$ , on calcule :

$$2 \times 1 + 1 + 2 \times 1 - 14 = 2 + 1 + 2 - 14 = -9$$

Comme  $-9 \neq 0$ , le point  $C$  n'appartient pas au plan  $P$ .

**3. a.** On vérifie d'abord que  $D(3; 2; 3)$  appartient au plan  $P$  :

$$2 \times 3 + 2 + 2 \times 3 - 14 = 6 + 2 + 6 - 14 = 0$$

Donc  $D \in P$ .

Ensuite, on calcule :

$$\overrightarrow{CD} = (3 - 1; 2 - 1; 3 - 1) = (2; 1; 2)$$

Or  $(2; 1; 2)$  est un vecteur normal au plan  $P$ . Donc la droite  $(CD)$  est perpendiculaire au plan  $P$ .

Comme  $D$  appartient au plan  $P$  et que  $(CD)$  est perpendiculaire à  $P$ , le point  $D$  est bien le projeté orthogonal de  $C$  sur le plan  $P$ .

**3. b.** D'après les questions précédentes, on sait que les points  $A, B$  et  $D$  appartiennent tous au plan  $P$ .

Vérifions qu'ils ne sont pas alignés. On a :

$$\overrightarrow{AB} = (5 - 4; -2 - 2; 3 - 2) = (1; -4; 1)$$

et :

$$\overrightarrow{AD} = (3 - 4; 2 - 2; 3 - 2) = (-1; 0; 1)$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Donc les points  $A, B$  et  $D$  définissent le plan  $P$ .

Or, d'après la question précédente, le point  $C$  n'appartient pas au plan  $P$ . Les points  $A, B, C$  et  $D$  ne sont donc pas coplanaires.

**3. c.** On utilise :

$$\overrightarrow{AB} = (1; -4; 1) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AD} = (-1; 0; 1)$$

Donc :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 1 \times (-1) + (-4) \times 0 + 1 \times 1 = -1 + 0 + 1 = 0$$

**3. d.** Puisque :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$$

les droites  $(AB)$  et  $(AD)$  sont perpendiculaires.

On peut prendre le triangle  $ABD$  comme base du tétraèdre. Son aire vaut :

$$\mathcal{A}_{ABD} = \frac{1}{2} \times AB \times AD$$

Or :

$$AB = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

et :

$$AD = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Donc :

$$\mathcal{A}_{ABD} = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 3$$

La hauteur relative à cette base est la distance de  $C$  au plan  $P$ . Comme  $D$  est le projeté orthogonal de  $C$  sur  $P$ , cette hauteur est  $CD$ .

$$CD = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

Le volume du tétraèdre  $ABCD$  est donc :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABD} \times CD = \frac{1}{3} \times 3 \times 3 = 3$$

**4. a.** On veut vérifier que le point

$$H \left( \frac{73}{29}; -\frac{4}{29}; \frac{51}{29} \right)$$

est le projeté orthogonal de  $A$  sur la droite  $(BC)$ .

On calcule d'abord :

$$\overrightarrow{BC} = (1 - 5; 1 - (-2); 1 - 3) = (-4; 3; -2)$$

Puis :

$$\overrightarrow{BH} = \left( \frac{73}{29} - 5; -\frac{4}{29} + 2; \frac{51}{29} - 3 \right) = \left( -\frac{72}{29}; \frac{54}{29}; -\frac{36}{29} \right)$$

On remarque que :

$$\overrightarrow{BH} = \frac{18}{29} \overrightarrow{BC}$$

Donc  $H$  appartient à la droite  $(BC)$ .

Il reste à vérifier que  $(AH)$  est perpendiculaire à  $(BC)$ . On calcule :

$$\overrightarrow{AH} = \left( \frac{73}{29} - 4; -\frac{4}{29} - 2; \frac{51}{29} - 2 \right) = \left( -\frac{43}{29}; -\frac{62}{29}; -\frac{7}{29} \right)$$

Alors :

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = \left( -\frac{43}{29} \right) \times (-4) + \left( -\frac{62}{29} \right) \times 3 + \left( -\frac{7}{29} \right) \times (-2) = \frac{172 - 186 + 14}{29} = 0$$

Donc  $(AH)$  est perpendiculaire à  $(BC)$ .

Ainsi,  $H$  est bien le projeté orthogonal de  $A$  sur la droite  $(BC)$ .

**4. b.** L'aire du triangle  $ABC$  peut se calculer en prenant  $BC$  comme base et  $AH$  comme hauteur.

On a :

$$BC = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$$

Calculons  $AH$  :

$$AH = \sqrt{\left(-\frac{43}{29}\right)^2 + \left(-\frac{62}{29}\right)^2 + \left(-\frac{7}{29}\right)^2} = \frac{\sqrt{43^2 + 62^2 + 7^2}}{29} = \frac{\sqrt{5742}}{29}$$

Or :

$$5742 = 29 \times 198 = 29 \times 9 \times 22$$

Donc :

$$AH = \frac{3\sqrt{29 \times 22}}{29} = \frac{3\sqrt{22}}{\sqrt{29}}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{ABC} &= \frac{1}{2} \times BC \times AH \\ \mathcal{A}_{ABC} &= \frac{1}{2} \times \sqrt{29} \times \frac{3\sqrt{22}}{\sqrt{29}} \\ \mathcal{A}_{ABC} &= \frac{3\sqrt{22}}{2}\end{aligned}$$

**4. c.** On utilise à nouveau la formule du volume d'un tétraèdre, cette fois avec le triangle  $ABC$  comme base.

On note  $d$  la distance du point  $D$  au plan  $(ABC)$ . Alors :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABC} \times d$$

On sait que :

$$V = 3 \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_{ABC} = \frac{3\sqrt{22}}{2}$$

Donc :

$$\begin{aligned}3 &= \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{22}}{2} \times d \\ 3 &= \frac{\sqrt{22}}{2} d\end{aligned}$$

$$d = \frac{6}{\sqrt{22}}$$

En rationalisant :

$$d = \frac{3\sqrt{22}}{11}$$

La distance du point  $D$  au plan  $(ABC)$  est donc :

$$\frac{3\sqrt{22}}{11}$$

#### EXERCICE 4 (5 points)

1. Pour tout  $x > 0$ , on a :

$$f(x) = x(\ln x)^2$$

Lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , on a :

$$x \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad (\ln x)^2 \rightarrow +\infty$$

Donc, par produit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

2. a. Pour tout réel  $x > 0$ , on a :

$$g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} \ln(\sqrt{x})$$

Or :

$$\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln x$$

Donc :

$$g(\sqrt{x}) = \frac{\sqrt{x}}{2} \ln x$$

$$4(g(\sqrt{x}))^2 = 4 \left( \frac{\sqrt{x}}{2} \ln x \right)^2$$

$$4(g(\sqrt{x}))^2 = 4 \times \frac{x}{4} (\ln x)^2$$

$$4(g(\sqrt{x}))^2 = x (\ln x)^2$$

Ainsi, on trouve bien :

$$f(x) = 4(g(\sqrt{x}))^2$$

**2. b.** D'après les croissances comparées, on sait que :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t = 0$$

Par ailleurs, lorsque  $x$  tend vers  $0^+$ , alors  $\sqrt{x}$  tend vers  $0^+$ .

Donc par composition :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(\sqrt{x}) = 0$$

Or, d'après la question précédente, on a :

$$f(x) = 4(g(\sqrt{x}))^2$$

On en déduit :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

**3. a.** Pour  $x > 0$ , on dérive :

$$f(x) = x(\ln x)^2$$

On utilise la formule de dérivation d'un produit  $(uv)' = u'v + uv'$  :

$$f'(x) = 1 \times (\ln x)^2 + x \times 2 \ln x \times \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = (\ln x)^2 + 2 \ln x$$

$$f'(x) = (\ln x)(\ln x + 2)$$

3. b. On étudie le signe de :

$$f'(x) = (\ln x)(2 + \ln x)$$

Les deux facteurs s'annulent lorsque :

$$\ln x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

et lorsque :

$$2 + \ln x = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x = -2$$

$$\Leftrightarrow x = e^{-2}$$

On obtient alors le signe suivant :

$$f'(x) > 0 \quad \text{sur } ]0; e^{-2}[$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{sur } ]e^{-2}; 1[$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{sur } ]1; +\infty[$$

Ainsi, la fonction  $f$  est croissante sur  $]0; e^{-2}]$ , décroissante sur  $]e^{-2}; 1]$ , puis croissante sur  $]1; +\infty[$ .

On peut aussi préciser les valeurs utiles :

$$f(e^{-2}) = e^{-2}(-2)^2 = \frac{4}{e^2}$$

et :

$$f(1) = 1 \times 0^2 = 0$$

On obtient le tableau de variations complet :

$x$	0	$e^{-2}$	1	$+\infty$		
Signe de $f'(x)$		+	0	-	0	+
Variations de $f(x)$			$\frac{4}{e^2}$			$+\infty$
	0				0	

**3. c.** Sur l'intervalle  $]0; 1]$ , la fonction  $f$  est croissante sur  $]0; e^{-2}]$ , puis décroissante sur  $[e^{-2}; 1]$ .

Son maximum est donc atteint en :

$$x = e^{-2}$$

La valeur exacte de ce maximum est :

$$f(e^{-2}) = \frac{4}{e^2}$$

**4. a.** Sur  $]0; 1]$ , le maximum de  $f$  est :

$$\frac{4}{e^2}$$

Or :

$$\frac{4}{e^2} < 2$$

Donc l'équation  $f(x) = 2$  n'a pas de solution sur  $]0; 1]$ .

Sur  $[1; +\infty[$ , la fonction  $f$  est continue et strictement croissante. De plus :

$$f(1) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Comme 2 est compris entre 0 et  $+\infty$ , le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'une solution sur  $[1; +\infty[$ .

Comme  $f$  est strictement croissante sur cet intervalle, cette solution est unique.

L'équation  $f(x) = 2$  admet donc une unique solution sur  $]0; +\infty[$ . On la note  $\alpha$ .

**4. b.** On calcule :

$$f(2,4) = 2,4 (\ln(2,4))^2 \approx 1,840$$

et :

$$f(2,5) = 2,5 (\ln(2,5))^2 \approx 2,099$$

Donc :

$$f(2,4) < 2 < f(2,5)$$

Comme  $f$  est strictement croissante sur  $[1; +\infty[$ , on en déduit :

$$2,4 < \alpha < 2,5$$

C'est un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude 0,1.

5. a. Sur l'intervalle  $]0; 1]$ , on a :

$$f(x) = x (\ln x)^2 \geq 0$$

Donc l'intégrale :

$$\int_a^1 f(x) dx$$

représente l'aire, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe représentative de  $f$ , l'axe des abscisses, et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = 1$ .

5. b.

Attention ! L'énoncé comporte une erreur dans le résultat à trouver.

Le résultat de l'intégration par parties sans erreur est :

$$\int_a^1 f(x) dx = -\frac{a^2}{2} (\ln a)^2 + \int_1^a x \ln x dx$$

ou, de manière équivalente :

$$\int_a^1 f(x) dx = -\frac{a^2}{2} (\ln a)^2 - \int_a^1 x \ln x dx$$

On réalise le calcul :

$$\int_a^1 x (\ln x)^2 dx$$

On effectue une intégration par parties avec :

$$u(x) = (\ln x)^2 \quad \text{et} \quad v'(x) = x$$

Alors :

$$u'(x) = \frac{2 \ln x}{x} \quad \text{et} \quad v(x) = \frac{x^2}{2}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \int_a^1 x (\ln x)^2 dx &= \left[ \frac{x^2}{2} (\ln x)^2 \right]_a^1 - \int_a^1 \frac{x^2}{2} \times \frac{2 \ln x}{x} dx \\ &= \left[ \frac{x^2}{2} (\ln x)^2 \right]_a^1 - \int_a^1 x \ln x dx \end{aligned}$$

Or :

$$\ln 1 = 0$$

Donc :

$$\left[ \frac{x^2}{2} (\ln x)^2 \right]_a^1 = \frac{1^2}{2} (\ln 1)^2 - \frac{a^2}{2} (\ln a)^2 = -\frac{a^2}{2} (\ln a)^2$$

Ainsi :

$$\int_a^1 f(x) dx = -\frac{a^2}{2} (\ln a)^2 - \int_a^1 x \ln x dx$$

5. c. On calcule maintenant :

$$\int_a^1 x \ln x dx$$

On effectue une nouvelle intégration par parties avec :

$$u(x) = \ln x \quad \text{et} \quad v'(x) = x$$

Alors :

$$u'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad v(x) = \frac{x^2}{2}$$

Donc :

$$\int_a^1 x \ln x dx = \left[ \frac{x^2}{2} \ln x \right]_a^1 - \int_a^1 \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} dx$$

$$\int_a^1 x \ln x dx = \left[ \frac{x^2}{2} \ln x \right]_a^1 - \int_a^1 \frac{x}{2} dx$$

Comme  $\ln 1 = 0$ , on a :

$$\left[ \frac{x^2}{2} \ln x \right]_a^1 = -\frac{a^2}{2} \ln a$$

et :

$$\int_a^1 \frac{x}{2} dx = \left[ \frac{x^2}{4} \right]_a^1 = \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4}$$

Donc :

$$\int_a^1 x \ln x dx = -\frac{a^2}{2} \ln a - \frac{1}{4} + \frac{a^2}{4}$$

En remplaçant dans le résultat de la question précédente :

$$\int_a^1 f(x) dx = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 - \left(-\frac{a^2}{2}\ln a - \frac{1}{4} + \frac{a^2}{4}\right)$$

$$\int_a^1 f(x) dx = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 + \frac{a^2}{2}\ln a + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4}$$

**5. d.** Lorsque  $a$  tend vers  $0^+$ , on utilise les limites classiques :

$$a^2(\ln a)^2 \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad a^2 \ln a \rightarrow 0$$

De plus :

$$a^2 \rightarrow 0$$

Donc, à partir de la formule précédente :

$$\int_a^1 f(x) dx = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 + \frac{a^2}{2}\ln a + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4}$$

on obtient :

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 f(x) dx = -\frac{0}{2} + \frac{0}{2} + \frac{1}{4} - \frac{0}{4} = \frac{1}{4}$$

---

*Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé maths au baccalauréat :*

[www.sujetdebac.fr/Annales/specialites/spe-mathematiques/](http://www.sujetdebac.fr/Annales/specialites/spe-mathematiques/)