BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2026

MATHÉMATIQUES

MARDI 16 JUIN 2026

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 9 pages numérotées de 1 à 9.

Le candidat doit traiter les quatre exercices proposés.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (4 points)

Partie A

L’agence de sûreté nucléaire ASNR contrôle les installations des centrales nucléaires afin de garantir leur sécurité et leur conformité. La fréquence des contrôles dépend de l’état du réacteur.

On considère que dans le parc nucléaire français :

- 20 % des réacteurs sont en arrêt pour maintenance ;
- 5 % des réacteurs fonctionnent au ralenti ;
- le reste des réacteurs du parc nucléaire est en état de fonctionnement normal.

On considère également que parmi les réacteurs en arrêt, 85 % sont contrôlés et que parmi les réacteurs fonctionnant au ralenti, 60 % sont contrôlés.

On choisit au hasard un réacteur dans le parc nucléaire français, et on note :

- A l’événement « Le réacteur est en arrêt » ;
- R l’événement « Le réacteur fonctionne au ralenti » ;
- N l’événement « Le réacteur fonctionne normalement » ;
- C l’événement « Le réacteur subit un contrôle ».

Pour un événement quelconque E, on désigne par $\overline{E}$ son événement contraire et par $P(E)$ sa probabilité.

On note x la probabilité que le réacteur subisse un contrôle sachant qu’il fonctionne normalement, c’est à dire $x = P_N(C)$.

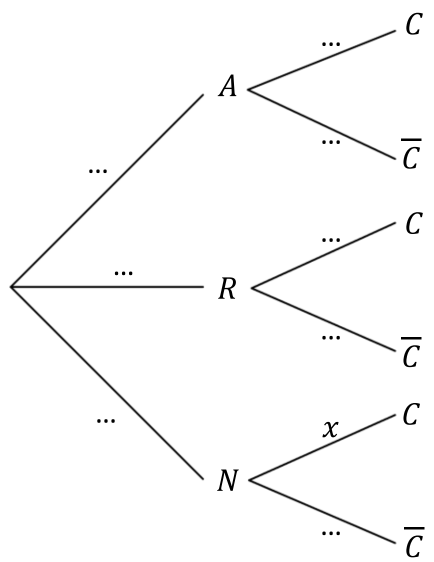
1. Recopier l’arbre des probabilités ci-contre en complétant les pointillés à l’aide des données de l’énoncé.

2. Calculer la probabilité que le réacteur soit en arrêt et qu’il subisse un contrôle.

On sait de plus que la probabilité qu’un réacteur du parc nucléaire soit contrôlé est égale à $0{,}35$.

3. Montrer que la probabilité x est égale à $0{,}2$.

4. Le réacteur choisi subit un contrôle.
Déterminer la probabilité qu’il fonctionne normalement.



Partie B

Dans le Sud de la France, on compte 12 réacteurs nucléaires qu'on numérote de 1 à 12.

On sait que lorsque le réacteur fonctionne normalement, sa production journalière est égale à 16 GWh (gigawattheure), lorsque le réacteur fonctionne au ralenti, sa production journalière est réduite à 10 GWh et enfin lorsque le réacteur est à l'arrêt, sa production journalière est nulle.

On rappelle que $P(N) = 0{,}75$, $P(R) = 0{,}05$ et $P(A) = 0{,}20$.

1. On désigne par X la variable aléatoire qui modélise la production journalière en GWh d'un réacteur.

a. Recopier le tableau ci-dessous et compléter les pointillés donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire X. On notera k les valeurs prises par la variable aléatoire X et p_k les probabilités égales à $P(\mathrm{X} = k)$.

k	0	...	...
p_k	$0{,}20$	...	...

b. Montrer que l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X est égale à $12{,}5$ et que sa variance $V(X)$ est égale à $40{,}75$.

2. Pour tout entier naturel i compris entre 1 et 12, on note X_i la variable aléatoire qui modélise la production journalière en GWh du i-ème réacteur.
Ainsi, par exemple, X_2 désigne la variable aléatoire qui modélise la production journalière en GWh du 2-ième réacteur.
On suppose que les variables $X_1, X_2, \dots, X_{12}$ suivent la même loi de probabilité que la variable aléatoire X, et qu'elles sont indépendantes.
On considère la variable aléatoire S qui donne la production totale journalière des 12 réacteurs. On a ainsi $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{12}$.
On note $E(S)$ l'espérance de la variable aléatoire S et $V(S)$ sa variance.

a. Montrer que $E(S) = 150$ et $V(S) = 489$.

b. Afin d'éviter le risque de surcharge du réseau et de couvrir l'ensemble des besoins en électricité, la production totale journalière des 12 réacteurs doit être comprise strictement entre 100 GWh et 200 GWh.

Peut-on affirmer que la probabilité d'éviter le risque de surcharge et de couvrir l'ensemble des besoins en électricité est supérieure à $0{,}80$? Justifier.

Exercice 2 (6 points)

Un médicament est administré à un patient par voie intraveineuse.

La notice du médicament indique que :

- le traitement doit durer au moins 7 h ;
- lorsque sa quantité, en mg, présente dans le sang est supérieure ou égale à 3 mg, il y a un risque de toxicité.

On s'intéresse à la quantité de médicament présente dans le sang au cours du temps sachant que le patient reçoit une première dose de 1 mg.

Deux protocoles sont étudiés dans les deux parties qui sont indépendantes.

Partie A : étude du premier protocole

Après l'injection de la première dose, une quantité supplémentaire de médicament est administrée régulièrement et de façon continue à un patient mis sous perfusion.

Dans cette partie, on modélise la quantité de médicament présente dans le sang du patient par une fonction q définie sur $[0\,;+\infty[$, où $q(t)$ désigne la quantité, en mg, de médicament présente dans le sang du patient, et t représente le temps, en heure, écoulé depuis l'injection initiale. On a ainsi $q(0) = 1$.

On admet que :

- la fonction q est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et on note q' sa fonction dérivée ;
- la fonction q est solution sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle (E) :

$$y' = -\frac{3}{10}\,y + 1$$

où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, et y' sa fonction dérivée.

1. Donner les solutions sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle (E).
2. Montrer que pour tout réel t appartenant à $[0\,;+\infty[$, $q(t) = \frac{10}{3} - \frac{7}{3}e^{-\frac{3}{10}t}$.
3. Déterminer la limite de la fonction q en $+\infty$. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
4. Etudier les variations de la fonction q sur $[0\,;+\infty[$.
5. Déterminer, en résolvant une inéquation, au bout de combien de temps après l'injection initiale le médicament présente un risque pour le patient. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-1}.
6. D'après ce modèle, le protocole présente-t-il un risque pour le patient ? Justifier.

Partie B : étude du second protocole

On injecte au patient une première dose de médicament de 1 mg. On admet que la quantité de médicament présente dans le sang du patient baisse de 30 % toutes les heures. Pour compenser cette baisse, on injecte une dose supplémentaire de $0{,}75$ mg de médicament toutes les heures.

On modélise la situation par une suite (u_n), où, pour tout entier naturel n, u_n représente la quantité, en mg, de médicament présente dans le sang du patient au bout de n heures écoulées depuis l'injection initiale.

Sous ces conditions, on a $u_0 = 1$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}7 \times u_n + 0{,}75$.

2.

- **a.** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.
- **b.** En déduire que la suite (u_n) est convergente.
- **c.** Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).
- **d.** D'après ce modèle, le traitement présente-t-il un risque pour le patient ? Justifier.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 2{,}5$.

- **a.** Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le terme initial.
- **b.** Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 2{,}5 - 1{,}5 \times 0{,}7^n$.

4. D'après ce modèle, au bout de combien d'injections supplémentaires la quantité de médicament présente dans le sang de ce patient dépasse-t-elle $2{,}4$ mg ?

Tourner la page

Exercice 3 (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse donnée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

On considère :

- les points $S(-1; \sqrt{2}; -4)$, $A(2; \sqrt{2}; -1)$, $B(1; \sqrt{2}; 0)$ et $C(2; 0; -1)$;
- la droite d dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$\begin{cases} x = 2 - k \\ y = \sqrt{2}\, k \\ z = -1 - k \end{cases} \quad , k \in \mathbb{R}\,;$$

- le plan P dont une équation cartésienne est : $x - z + 1 = 0$.

On admet que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Affirmation 1 :

Le vecteur $\overrightarrow{SA}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Affirmation 2 :

Les droites (SB) et d sont sécantes.

Affirmation 3 :

La droite d est parallèle au plan P.

Affirmation 4 :

Le projeté orthogonal de S sur le plan P est le point H de coordonnées $(-3; \sqrt{2}; -2)$.

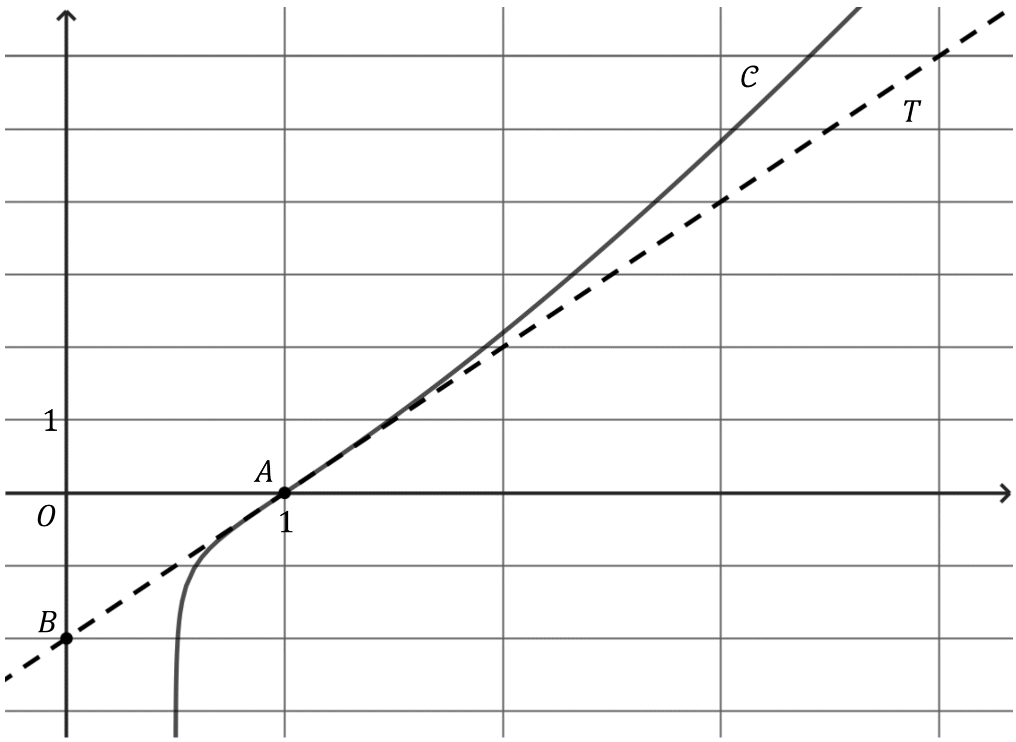
Exercice 4 (6 points)

Partie A : lecture graphique

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

On a tracé, dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction f, notée $\mathcal{C}$, ainsi que la tangente T à $\mathcal{C}$ au point $A(1\,;0)$. On précise que T passe par le point $B(0\,;-2)$.



On répondra aux questions suivantes en les justifiant à l'aide du graphique.

1. Déterminer $f'(1)$.
2. La fonction f est-elle concave sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$?
3. Déterminer $f''(1)$.

Partie B : étude de fonction

On admet que la fonction représentée graphiquement dans la partie A est définie sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ par :

$$f(x) = x\ln(2x-1)$$

où $\ln$désigne la fonction logarithme népérien.

On rappelle que :

- la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$, que f' désigne sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde ;
- $\mathcal{C}$ désigne la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

1. Déterminer, en justifiant, la limite de la fonction f en $\frac{1}{2}$. En déduire une interprétation graphique.

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

3. On admet que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$:

$$f'(x) = \ln(2x-1) + \frac{2x}{2x-1}\ .$$

a. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$:

$$f''(x) = \frac{4(x-1)}{(2x-1)^2}.$$

b. Montrer que $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion et que ce point est l'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.

4.

a. Montrer que la fonction f est positive sur l'intervalle $[1\,;2]$.

b. On admet que pour tout x appartenant à l'intervalle $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$, on a :

$$\frac{x^2}{2x-1} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times \frac{2}{2x-1}.$$

Montrer que :

$$\int_1^2 \frac{x^2}{2x-1}\,dx = 1 + \frac{1}{8}\ln(3).$$

c. On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

En vous aidant d'une intégration par parties, déterminer la valeur exacte de l'aire $\mathcal{A}$ en unité d'aire.

Partie C : généralisation

On désigne par a un réel strictement positif et par f_a la fonction définie sur l'intervalle $]\frac{1}{a}\,;+\infty[$ par :

$$f_a(x) = x\ln(ax-1).$$

On admet que f_a est deux fois dérivable sur l'intervalle $]\frac{1}{a}\,;+\infty[$. On note f_a' sa fonction dérivée, f_a'' sa fonction dérivée seconde, et $\mathcal{C}_a$ sa représentation graphique.

On admet que pour tout x appartenant à l'intervalle $]\frac{1}{a}\,;+\infty[$:

$$f_a''(x) = \frac{a(ax-2)}{(ax-1)^2}.$$

1. Montrer que pour tout réel a strictement positif, la courbe $\mathcal{C}_a$ admet un unique point d'inflexion A_a.

2. Montrer que les points A_a sont alignés, a appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$.