# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

**SESSION 2026**

# MATHÉMATIQUES

## MERCREDI 17 JUIN 2026

Durée de l'épreuve : **4 heures**

*L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.*

*L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.*

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 9 pages numérotées de 1 à 9.

Le candidat doit traiter les quatre exercices proposés.

*Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.*

## Exercice 1 (6 points)

*Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.*

On s'intéresse à un réseau de communication constitué d'une chaine de relais (satellites, antennes, opérateurs…) pour transmettre des messages.

À chaque transmission entre deux relais successifs, des erreurs peuvent apparaitre dans le message. Une étude statistique a permis d'établir que pour chaque relai :

- si le message reçu est sans erreur, il a 94 % de chances d'être transmis sans erreur au relai suivant ;
- si le message reçu comporte des erreurs, il y a 35 % de chances que les erreurs soient corrigées et donc que le message soit transmis sans erreur au relai suivant.

On choisit au hasard un message envoyé au cours d'une journée.

Pour un événement $E$ quelconque, on désigne par $\overline{E}$ son événement contraire et par $P(E)$ sa probabilité.

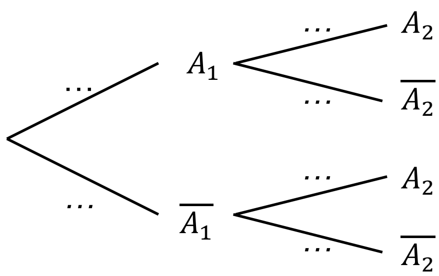
### Partie A

On considère les évènements suivants :

- $A_1$ : « le message reçu par le premier relai est sans erreur » ;
- $A_2$ : « le message reçu par le deuxième relai est sans erreur ».

On admet que $P(A_1) = 0{,}96$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.
2. Montrer que $P(A_2) = 0{,}9164$.
3. Calculer $P_{A_2}\left(\overline{A_1}\right)$. On arrondira le résultat à $10^{-4}$.
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.




### Partie B

Pour vérifier le bon fonctionnement d'un relai, des tests indépendants les uns des autres sont effectués. Un test est positif si la présence d'au moins une erreur est détectée.

On admet que la probabilité qu'un test soit positif est égale à $0{,}04$.

On choisit au hasard un échantillon de $50$ tests réalisés sur le relai. Le nombre de tests réalisés est suffisamment grand pour assimiler ce choix à un tirage avec remise.

**1.** On note $X$ la variable aléatoire qui à chaque échantillon de $50$ tests associe le nombre de tests positifs.

Ainsi la variable aléatoire $X$ suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}04$.

**a.** Déterminer la probabilité que $4$ tests soient positifs dans cet échantillon. On arrondira le résultat à $10^{-2}$.

**b.** Donner la probabilité qu'au moins un test soit positif dans cet échantillon. On arrondira le résultat à $10^{-2}$.

**c.** Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $X$.

**2.** On étudie une chaîne de transmission de l'information composée de $25$ relais.

On considère la variable aléatoire $X_1$ qui à chaque échantillon de $50$ tests pratiqués sur le relai $1$ associe le nombre de tests positifs.

On définit de la même manière les variables aléatoires $X_2$ pour le relai $2$, …, $X_{25}$ pour le relai $25$.

On admet que ces $25$ variables aléatoires sont indépendantes entre elles et qu'elles admettent la même espérance égale à $2$ et la même variance égale à $1{,}92$.

On note $M$ la variable aléatoire donnant la moyenne du nombre de tests positifs lors des contrôles effectués sur les $25$ relais.

On a donc $M = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_{25}}{25}$.

**a.** Vérifier que $E(M) = 2$ et montrer que $V(M) = 0{,}0768$.

**b.** À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que la probabilité que la moyenne des tests positifs soit strictement inférieure à $7$ est supérieure à $0{,}99$.

*<u>Indication</u> : on pourra utiliser, sans justification, le fait que :*

$$P(M < 7) = P(-3 < M < 7).$$

## Partie C

On désigne par $n$ un entier naturel non nul.

On s'intéresse à une chaine de transmission de l'information composée de $n$ relais.

On considère l'évènement $A_n$ : « le message reçu par le $n$-ième relai est sans erreur ».

On note $p_n$ la probabilité que le message reçu au $n$-ième relai soit sans erreur.

On a ainsi $p_n = P(A_n)$ et $p_1 = 0{,}96$.

On admet que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$p_{n+1} = 0{,}59 p_n + 0{,}35.$$

**1.** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $p_{n+1} \leqslant p_n$ .

**2.** Montrer que la suite $(p_n)$ est convergente.

**3.** Déterminer la valeur exacte de sa limite.

## Exercice 2 (5 points)

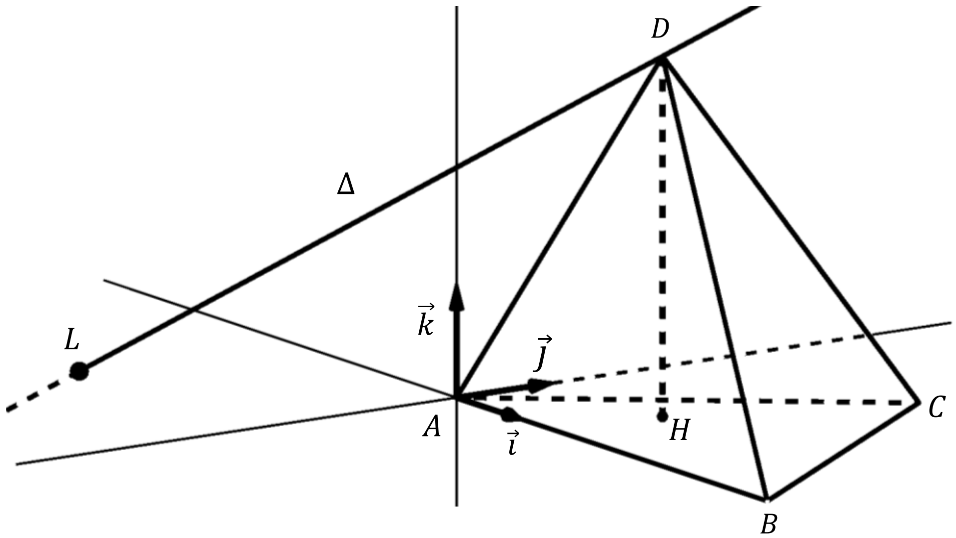
Dans une salle d'escalade, un nouveau module en forme de tétraèdre, destiné à être posé au sol, est en cours de fabrication. Ce module servira à créer des plans inclinés.

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(A; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. L'unité est le mètre.

On considère les trois points suivants : $B\left(\frac{9}{2}; 0; 0\right)$, $C\left(\frac{9}{4}; 3; 0\right)$ et $D\left(\frac{3}{2}; 1; 3\right)$.

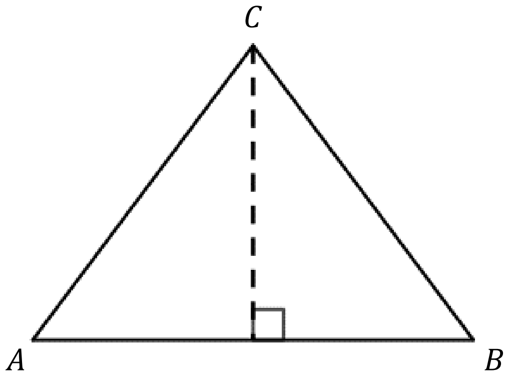
On modélise le module par le tétraèdre $ABCD$.

On souhaite analyser ce module pour des raisons de construction et de sécurité.



## Partie A

1. On représente ci-contre le triangle $ABC$ et sa hauteur issue de $C$.




   a. Montrer que le triangle $ABC$ est isocèle en $C$.

   b. Montrer que l'aire du triangle $ABC$ est égale à $6{,}75$ m².

2.

   a. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan $(ABC)$ est : $z = 0$.

   b. Montrer que le point $H\left(\frac{3}{2}; 1; 0\right)$ est le projeté orthogonal du point $D$ sur le plan $(ABC)$.

3. On rappelle que le volume $V$ d'un tétraèdre est donné par $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et $h$ la hauteur relative à la base $\mathcal{B}$.

   En déduire le volume du module.

## Partie B

1. On considère le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   a. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan $(BCD)$.

   b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan $(BCD)$ est :
   $$4x + 3y + 3z - 18 = 0.$$

   c. Donner une représentation paramétrique de la droite $\Delta$ orthogonale au plan $(BCD)$ et passant par $D$.

2. On admet que la droite $\Delta$ et le plan $(ABC)$ sont sécants et on désigne par $L$ leur point d'intersection.

   Montrer que $L$ a pour coordonnées $\left(-\frac{5}{2} ; -2 ; 0\right)$.

3. Le module est considéré adapté aux débutants si l'angle $\widehat{LDH}$ est strictement inférieur à 60°.

   Montrer que ce module est adapté aux débutants.

**Exercice 3 (4 points)**

*Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.*

**1.** Le plan est muni d'un repère orthonormé.

**a.** On considère l'équation différentielle $(E_1) : y' + 2y = 0$, où $y$ est une fonction de la variable $x$ définie sur $\mathbb{R}$.

On note $f$ la solution de l'équation différentielle $(E_1)$ telle que $f(0) = 1$.

**Affirmation 1 :** La courbe représentative de la fonction $f$ passe par le point $A$ de coordonnées $\left(\ln 2\,; \frac{1}{2}\right)$.

**b.** On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ par :

$$f(x) = x - \cos(x).$$

**Affirmation 2 :** Sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, la courbe représentative de la fonction $f$ est au-dessus de ses tangentes.

**c.** On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]0\,; +\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + \frac{\sin(x)}{x}.$$

**Affirmation 3 :** La droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale de la courbe représentative de la fonction $f$.

**2.** On considère l'équation différentielle $(E_2) : y' - 3y = 2 - 6x$, où $y$ est une fonction de la variable $x$ définie sur $\mathbb{R}$.

**Affirmation 4 :** La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - \mathrm{e}^{3x}$ est une solution de l'équation $(E_2)$.

**Exercice 4 (5 points)**

On considère la fonction $f_k$ définie sur $]0\,; +\infty[$ par :

$$f_k(x) = 1 - x + \frac{k(1 + \ln x)}{x}$$

où $k$ est un réel strictement positif et $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

On désigne par $C_k$ la représentation graphique de la fonction $f_k$ dans un repère orthonormé.

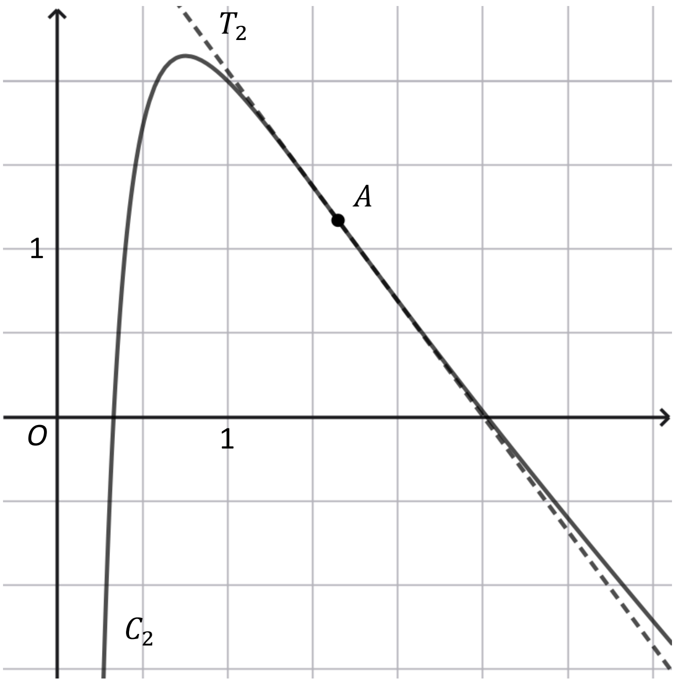
On admet que la fonction $f_k$ est deux fois dérivable sur $]0\,; +\infty[$ . On note $f_k'$ sa dérivée première et $f_k''$ sa dérivée seconde.

**Partie A : étude d'un premier cas particulier**

Dans cette partie, on se place dans le cas $k = 2$.

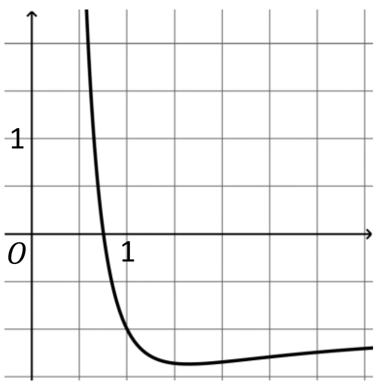
La courbe $C_2$ est représentée sur le graphique ci-dessous. On précise que :

- Le point $A$ est un point d'inflexion de la courbe $C_2$ ;
- $T_2$ est la tangente à la courbe $C_2$ au point $A$.

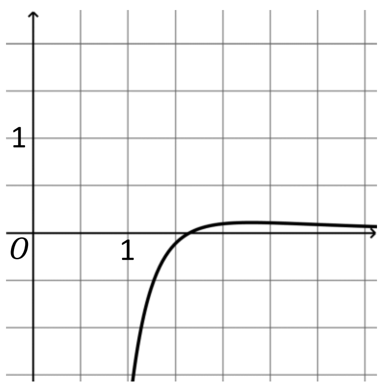



**1.** On considère une primitive $F_2$ de la fonction $f_2$ sur $]0\,;+\infty[$. Avec la précision permise par le graphique, donner les variations de la fonction $F_2$ sur l'intervalle $]0\,;3]$.

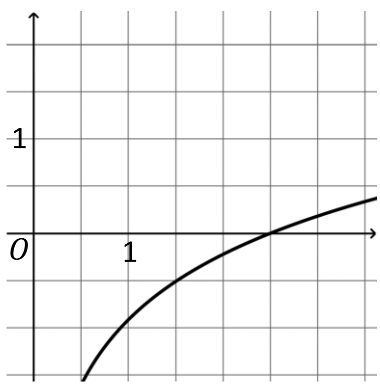
**2.** Parmi les trois courbes ci-dessous, indiquer celle qui représente $f_2'$ et celle qui représente $f_2''$. Justifier.




Courbe 1




Courbe 2




Courbe 3

## Partie B : étude d'un second cas particulier

Dans cette partie on se place dans le cas $k = 1$.

On considère la fonction $f_1$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f_1(x) = 1 - x + \frac{1 + \ln x}{x}.$$

**1.**

**a.** Montrer que pour tout réel $x > 0$ :

$$f_1'(x) = -1 - \frac{\ln x}{x^2}.$$

**b.** Déterminer la limite de $f_1'(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

**2.** On admet que :

- l'axe des ordonnées est une asymptote de la courbe de $f_1'$ ;
- pour tout réel $x > 0$, $f_1''(x) = \frac{2\ln x - 1}{x^3}$.

On donne ci-dessous le tableau de variations de $f_1'$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

| $x$ | $0$ | | $e^{\frac{1}{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_1'$ | $+\infty$ | ↘ | $-1-\frac{1}{2e}$ | ↗ | $-1$ |

**a.** Justifier les variations de la fonction $f_1'$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et la valeur de l'extremum.

**b.** Justifier la limite de la fonction $f_1'$ en $0$.

**c.** Montrer qu'il existe une unique solution $\alpha$ à l'équation $f_1'(x) = 0$ sur $]0\,;+\infty[$. En déduire que $f_1$ admet un maximum sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

**d.** Recopier et compléter les pointillés du programme écrit en langage Python ci-dessous, afin qu'il renvoie une valeur approchée à $10^{-2}$ près de la solution $\alpha$ de l'équation $f_1'(x) = 0$ sur $]0\,;+\infty[$.

```
def d(x) :
  return -1-ln(x)/x**2

def alpha() :
  u = 0.5
  while d(u) … 0 :
     u = …
  return u
```

On rappelle que x**2 désigne $x^2$.

## Partie C : $k$ quelconque

On considère la fonction $h$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x)=\frac{1+\ln x}{x}$ et la fonction $H$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par $H(x)=\frac{1}{2}(1+\ln x)^2$. On admet que $H$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

**1.** Montrer que la fonction $H$ est une primitive de $h$.

On rappelle que $k$ est un réel strictement positif et que $f_k$ est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f_k(x)=1-x+\frac{k(1+\ln x)}{x}.$$

**2.** Existe-t-il une valeur de $k$ pour laquelle la valeur moyenne de la fonction $f_k$ sur l'intervalle $[1\,;\mathrm{e}]$ est égale à $0$ ? Justifier.