Corrigé du bac général 2026
Spécialité Mathématiques – Centres Étrangers Afrique – Jour 1

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2026

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

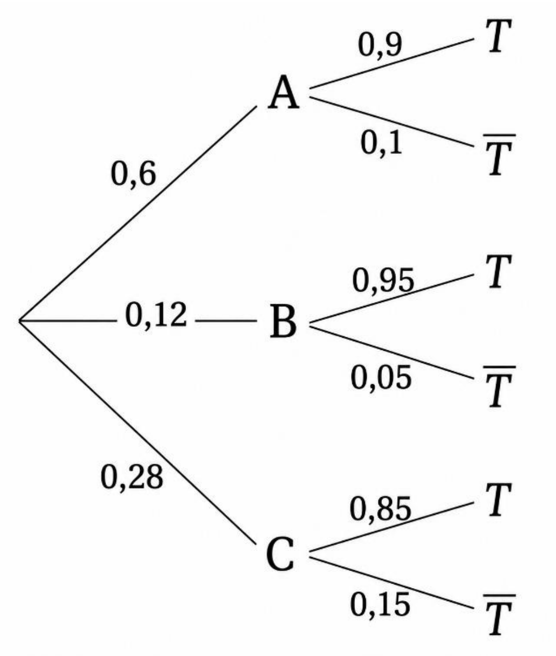
Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site sujetdebac.fr

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé maths au baccalauréat :
www.sujetdebac.fr/annales/specialites/spe-mathematiques/

EXERCICE 1 (5 points)

Partie A

1. On obtient l'arbre pondéré suivant :



2. On cherche la probabilité que la lame provienne du fournisseur A et qu'elle ne soit pas conforme.

$$P(A \cap \overline{T}) = P(A) \times P_A(\overline{T}) = 0{,}6 \times 0{,}1 = 0{,}06$$

Cela signifie que 6 % des lames vendues par l'équipementier proviennent du fournisseur A et sont non conformes.

3. Les événements A, B et C forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(A \cap T) + P(B \cap T) + P(C \cap T)$$

$$P(T) = 0{,}6 \times 0{,}9 + 0{,}12 \times 0{,}95 + 0{,}28 \times 0{,}85 = 0{,}892$$

La probabilité que la lame testée soit conforme est donc bien égale à $0{,}892$.

4. On cherche ici $P_{\overline{T}}(B)$.

$$P_{\overline{T}}(B) = \frac{P(B \cap \overline{T})}{P(\overline{T})}$$

Or :

$$P(\overline{T}) = 1 - P(T) = 1 - 0{,}892 = 0{,}108$$

et :

$$P(B \cap \overline{T}) = P(B) \times P_B(\overline{T}) = 0{,}12 \times 0{,}05 = 0{,}006$$

Donc :

$$P_{\overline{T}}(B) = \frac{0{,}006}{0{,}108} \approx 0{,}056$$

Sachant que la lame testée n'est pas conforme, la probabilité qu'elle provienne du fournisseur B est environ 0,056, soit 5,6 %.

Partie B

1. La variable aléatoire X compte le nombre de lames non conformes dans un échantillon de 75 lames.

Chaque lame a une probabilité 0,108 d'être non conforme, et les choix sont assimilés à des tirages indépendants avec remise.

Ainsi :

$$X \sim \mathcal{B}(75; 0{,}108)$$

2. On calcule :

$$P(X = 6) = \binom{75}{6} \times 0{,}108^6 \times (1 - 0{,}108)^{75-6} = \binom{75}{6} \times 0{,}108^6 \times 0{,}892^{69} \approx 0{,}120$$

La probabilité que 6 lames exactement soient non conformes est donc environ $0{,}120$, soit 12%.

3. On cherche $P(X > 8)$.

À la calculatrice, avec $X \sim \mathcal{B}(75; 0{,}108)$, on obtient :

$$P(X > 8) = 1 - P(X \leq 8) \approx 1 - 0{,}578 \approx 0{,}422$$

Comme :

$$0{,}422 < 0{,}50$$

l'équipementier a raison. La probabilité qu'il y ait strictement plus de 8 lames non conformes est inférieure à 50 %.

Partie C

1. Chaque variable aléatoire X_i suit la même loi que X, donc :

$$E(X_i) = 75 \times 0{,}108 = 8{,}1$$

et :

$$V(X_i) = 75 \times 0{,}108 \times 0{,}892 = 7{,}2252$$

On a :

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

Par linéarité de l'espérance :

$$E(M_n) = \frac{E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)}{n} = \frac{n \times 8{,}1}{n} = 8{,}1$$

Comme les variables $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes :

$$V(M_n) = V\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right)$$

Donc :

$$V(M_n) = \frac{1}{n^2}\big(V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)\big) = \frac{1}{n^2} \times n \times 7{,}2252 = \frac{7{,}2252}{n}$$

2. On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|M_n - E(M_n)| \geq 2) \leq \frac{V(M_n)}{2^2}$$

Comme $E(M_n) = 8{,}1$, on obtient :

$$P(|M_n - 8{,}1| \geq 2) \leq \frac{\frac{7{,}2252}{n}}{4}$$

$$P(|M_n - 8{,}1| \geq 2) \leq \frac{1{,}8063}{n}$$

3. On veut :

$$P(|M_n - 8{,}1| < 2) \geq 0{,}95$$

Or l'événement contraire de $|M_n - 8{,}1| < 2$ est $|M_n - 8{,}1| \geq 2$.

Donc :

$$P(|M_n - 8{,}1| < 2) = 1 - P(|M_n - 8{,}1| \geq 2)$$

Or d'après la question précédente :

$$P(|M_n - 8{,}1| < 2) \geq 1 - \frac{1{,}8063}{n}$$

Il suffit donc de résoudre l'inéquation :

$$1 - \frac{1{,}8063}{n} \geq 0{,}95$$

$$\Leftrightarrow \frac{1{,}8063}{n} \leq 0{,}05$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{1{,}8063}{0{,}05}$$

$$\Leftrightarrow n \geq 36{,}126$$

Comme n est un entier, on peut prendre :

$$n = 37$$

À partir de 37 compétitions, la probabilité que le nombre moyen de lames non conformes par échantillon de 75 lames soit compris entre 6,1 et 10,1 est au moins égale à 95 %.

EXERCICE 2 (5 points)

1. L'affirmation 1 est vraie.

On dérive la fonction f :

$$f'(x) = -4\mathrm{e}^{-x} - \sin(x) + \cos(x)$$

Donc :

$$f'(x) + f(x) = (-4\mathrm{e}^{-x} - \sin(x) + \cos(x)) + (4\mathrm{e}^{-x} + \cos(x) + \sin(x))$$

Les termes en e^{-x} et en $\sin(x)$ s'annulent, d'où :

$$f'(x) + f(x) = 2\cos(x)$$

Ainsi, la fonction f est bien solution de l'équation différentielle (E).

2. L’affirmation 2 est vraie.

Les points d’intersection des deux courbes ont pour abscisses les solutions de l’équation :

$$2x = \sin(x)$$

On sait que, pour tout réel x :

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$

Si $x > \frac{1}{2}$, alors $2x > 1$, donc l’égalité $2x = \sin(x)$ est impossible.

Si $x < -\frac{1}{2}$, alors $2x < -1$, donc l’égalité est également impossible.

Il suffit donc d’étudier l’équation sur l’intervalle :

$$\left[-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right]$$

On pose :

$$h(x) = 2x - \sin(x)$$

Alors :

$$h'(x) = 2 - \cos(x)$$

Comme $\cos(x) \leq 1$, on a :

$$h'(x) \geq 1$$

La fonction h est donc strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right]$.

De plus :

$$h(0) = 0$$

L’équation $h(x) = 0$, c’est-à-dire $2x = \sin(x)$, admet donc une unique solution : $x = 0$.

Les deux courbes ont donc un seul point d’intersection.

3. L’affirmation 3 est fausse.

On sépare les deux termes :

$$v_n = \frac{2n + \sin(n)}{n + 1} = \frac{2n}{n + 1} + \frac{\sin(n)}{n + 1} = \frac{2}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{\sin(n)}{n + 1}$$

Or :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{n}} = 2$$

De plus, comme $-1 \leq \sin(n) \leq 1$, on a :

$$-\frac{1}{n+1} \leq \frac{\sin(n)}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin(n)}{n+1} = 0$$

Ainsi :

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = 2 + 0 = 2$$

La suite (v_n) converge vers 2. Elle ne diverge donc pas.

4. L'affirmation 4 est vraie.

On peut démontrer cette formule par récurrence.

<u>Initialisation :</u>

Pour $n = 1$, on a :

$$u_1 = 1$$

et :

$$1^2 = 1$$

La formule est donc vraie au rang 1.

<u>Hérédité :</u>

Supposons maintenant que, pour un certain entier $n \geq 1$, on ait :

$$u_n = n^2$$

Alors :

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 1$$

Donc, en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$u_{n+1} = n^2 + 2n + 1$$

$$u_{n+1} = (n+1)^2$$

La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

<u>Conclusion :</u>

Par récurrence, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a bien :

$$u_n = n^2$$

5. L'affirmation 5 est vraie.

La suite (u_n) est géométrique de premier terme :

$$u_0 = 1$$

et de raison :

$$q = \mathrm{e}^{-1}$$

Ainsi :

$$S_n = 1 + \mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^{-2} + \cdots + \mathrm{e}^{-n} = \frac{1 - (\mathrm{e}^{-1})^{n+1}}{1 - \mathrm{e}^{-1}}$$

Par ailleurs, comme :

$$\lim_{n \to +\infty} (\mathrm{e}^{-1})^{n+1} = 0$$

on obtient :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-1}}$$

Or :

$$\frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-1}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\mathrm{e}}} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e} - 1}$$

Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e} - 1}$$

EXERCICE 3 (4 points)

1. Dans le repère donné, on a :

$$E(0;0;1) \qquad F(1;0;1) \qquad H(0;1;1) \qquad A(0;0;0)$$

Le point I est le milieu de $[EF]$, donc :

$$I\left(\frac{1}{2};0;1\right)$$

Le point J est le milieu de $[EH]$, donc :

$$J\left(0;\frac{1}{2};1\right)$$

Le point K est le milieu de $[AE]$, donc :

$$K\left(0; 0; \frac{1}{2}\right)$$

2. a. On a :

$$\overrightarrow{AI} = \left(\frac{1}{2}; 0; 1\right) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AJ} = \left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$$

Donc :

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2} \times 0 + 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times 1 = 1$$

2. b. On utilise la formule :

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = AI \times AJ \times \cos(\widehat{IAJ})$$

Or :

$$AI = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

et de même :

$$AJ = \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Ainsi :

$$1 = \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \cos(\widehat{IAJ})$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{5}{4} \cos(\widehat{IAJ})$$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{IAJ}) = \frac{4}{5}$$

Donc :

$$\widehat{IAJ} \approx 36,9°$$

La mesure de l'angle $\widehat{IAJ}$, arrondie au dixième de degré, est donc $36,9°$.

3. a. On a :

$$C(1; 1; 0) \qquad \text{donc} \qquad \overrightarrow{KC} = \left(1; 1; -\frac{1}{2}\right)$$

On vérifie que ce vecteur est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (AIJ), par exemple $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$.

$$\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{AI} = 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times 0 - \frac{1}{2} \times 1 = 0$$

De même :

$$\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{AJ} = 1 \times 0 + 1 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 1 = 0$$

Le vecteur $\overrightarrow{KC}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (AIJ). Il est donc normal au plan (AIJ).

3. b. Le plan (AIJ) passe par $A(0; 0; 0)$ et admet pour vecteur normal :

$$\overrightarrow{KC} = \left(1; 1; -\frac{1}{2}\right)$$

Une équation cartésienne du plan est donc de la forme :

$$x + y - \frac{1}{2}z + d = 0$$

Comme le point $A(0; 0; 0)$ appartient au plan, on obtient :

$$d = 0$$

Ainsi, une équation cartésienne du plan (AIJ) est :

$$x + y - \frac{1}{2}z = 0$$

4. a. Le point L est le projeté orthogonal de C sur le plan (AIJ). Donc L appartient à la droite passant par C et dirigée par un vecteur normal au plan.

On utilise le vecteur normal :

$$\vec{n} = \left(1; 1; -\frac{1}{2}\right)$$

La droite passant par $C(1; 1; 0)$ et de direction $\vec{n}$ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -\frac{1}{2}t \end{cases}$$

Le point L appartient aussi au plan (AIJ), donc ses coordonnées vérifient :

$$x + y - \frac{1}{2}z = 0$$

On remplace x, y et z :

$$(1+t)+(1+t)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}t\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2+2t+\frac{1}{4}t=0$$

$$\Leftrightarrow 2+\frac{9}{4}t=0$$

$$\Leftrightarrow t=-\frac{8}{9}$$

On en déduit :

$$x=1-\frac{8}{9}=\frac{1}{9}$$

$$y=1-\frac{8}{9}=\frac{1}{9}$$

$$z=-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{8}{9}\right)=\frac{4}{9}$$

Donc :

$$L\left(\frac{1}{9};\frac{1}{9};\frac{4}{9}\right)$$

4. b. La distance du point C au plan (AIJ) est égale à la longueur CL.

$$\overrightarrow{CL}=\left(\frac{1}{9}-1;\frac{1}{9}-1;\frac{4}{9}-0\right)=\left(-\frac{8}{9};-\frac{8}{9};\frac{4}{9}\right)$$

Donc :

$$CL=\sqrt{\left(-\frac{8}{9}\right)^2+\left(-\frac{8}{9}\right)^2+\left(\frac{4}{9}\right)^2}=\sqrt{\frac{64}{81}+\frac{64}{81}+\frac{16}{81}}=\sqrt{\frac{144}{81}}=\frac{4}{3}$$

La distance du point C au plan (AIJ) est donc égale à $\frac{4}{3}$.

5. a. On a :

$$I\left(\frac{1}{2};0;1\right)\qquad\text{et}\qquad M(1;m;1)$$

Donc :

$$\overrightarrow{IM}=\left(1-\frac{1}{2};m-0;1-1\right)=\left(\frac{1}{2};m;0\right)$$

Une représentation paramétrique de la droite (IM) est donc :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s \\ y = ms \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{avec } s \in \mathbb{R}$$

5. b. Pour savoir si les droites (IM) et (KC) sont coplanaires, on peut chercher si elles sont sécantes. Elles ne sont pas parallèles, car leurs vecteurs directeurs $\left(\frac{1}{2}; m; 0\right)$ et $\left(1; 1; -\frac{1}{2}\right)$ ne peuvent pas être colinéaires, notamment à cause de la coordonnée en z.

Une représentation paramétrique de la droite (KC) est :

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda \end{cases} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

On cherche donc s'il existe s et λ tels que :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s = \lambda \\ ms = \lambda \\ 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda \end{cases}$$

La troisième équation donne :

$$1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -1$$

La première équation devient alors :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}s = -1$$

$$\Leftrightarrow s = -3$$

La deuxième équation donne :

$$m \times (-3) = -1$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{1}{3}$$

Les droites (IM) et (KC) sont donc sécantes uniquement lorsque :

$$m = \frac{1}{3}$$

On ne peut donc pas affirmer qu'elles sont coplanaires quelle que soit la valeur de m. Elles le sont seulement pour $m = \frac{1}{3}$.

EXERCICE 4 (6 points)

Partie A

1. a. On étudie les limites de :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$$

Quand x tend vers 0, on a :

$$\ln(x) \to -\infty \qquad \text{et} \qquad x^2 \to 0^+$$

Donc :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

Quand x tend vers $+\infty$, la puissance x^2 l'emporte sur $\ln(x)$, donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$$

Ainsi :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

1. b. Comme :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

la droite d'équation $x = 0$, c'est-à-dire l'axe des ordonnées, est une asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$.

Comme :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

la droite d'équation $y = 0$, c'est-à-dire l'axe des abscisses, est une asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

2. Pour tout réel $x > 0$, on écrit :

$$f(x) = \ln(x) \times x^{-2}$$

Donc :

$$f'(x) = \frac{1}{x} \times x^{-2} + \ln(x) \times (-2x^{-3}) = \frac{1}{x^3} - \frac{2\ln(x)}{x^3}$$

Ainsi :

$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$$

3. Pour tout $x > 0$, on a $x^3 > 0$. Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $1 - 2\ln(x)$.

$$1 - 2\ln(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}}$$

On en déduit que $f'(x) > 0$ sur $\left]0; \sqrt{\mathrm{e}}\right[$, puis $f'(x) < 0$ sur $\left]\sqrt{\mathrm{e}}; +\infty\right[$.

La fonction f est donc croissante sur $\left]0; \sqrt{\mathrm{e}}\right]$, puis décroissante sur $\left[\sqrt{\mathrm{e}}; +\infty\right[$.

De plus :

$$f\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) = \frac{\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)}{\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\mathrm{e}} = \frac{1}{2\mathrm{e}}$$

On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	0		$\sqrt{\mathrm{e}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	${}^{1}/_{2e}$	$\searrow$	0

La fonction f admet donc un maximum égal à $\frac{1}{2\mathrm{e}}$, atteint en $x = \sqrt{\mathrm{e}}$.

4. On cherche la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

$$f(1) = \frac{\ln(1)}{1^2} = 0 \qquad \text{et} \qquad f'(1) = \frac{1 - 2\ln(1)}{1^3} = 1$$

L'équation de la tangente est donc :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$\Leftrightarrow y = x - 1$$

5. Pour tout $x > 0$, on part de :

$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3} = (1 - 2\ln(x))x^{-3}$$

Alors :

$$f''(x) = -\frac{2}{x}x^{-3} + (1-2\ln(x))(-3x^{-4}) = \frac{-2}{x^4} + \frac{-3+6\ln(x)}{x^4}$$

Donc :

$$f''(x) = \frac{-5+6\ln(x)}{x^4}$$

6. a. Pour tout $x > 0$, on a $x^4 > 0$. Le signe de $f''(x)$ est donc celui de $-5+6\ln(x)$.

$$-5+6\ln(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = \frac{5}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{5/6}$$

Ainsi, $f''(x) < 0$ sur $]0;\mathrm{e}^{5/6}[$, puis $f''(x) > 0$ sur $]\mathrm{e}^{5/6};+\infty[$.

La fonction f est donc concave sur $]0;\mathrm{e}^{5/6}]$, puis convexe sur $[\mathrm{e}^{5/6};+\infty[$.

La convexité change en $x = \mathrm{e}^{5/6}$, donc la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse $\mathrm{e}^{5/6}$.

Son ordonnée est :

$$f\left(\mathrm{e}^{5/6}\right) = \frac{\ln\left(\mathrm{e}^{5/6}\right)}{(\mathrm{e}^{5/6})^2} = \frac{\frac{5}{6}}{\mathrm{e}^{5/3}} = \frac{5}{6\mathrm{e}^{5/3}}$$

Le point d'inflexion a donc pour coordonnées :

$$\left(\mathrm{e}^{5/6};\frac{5}{6\mathrm{e}^{5/3}}\right)$$

6. b. Sur l'intervalle $]0;\mathrm{e}^{5/6}]$, la fonction f est concave.

Or, pour une fonction concave, la courbe est située en dessous de ses tangentes. En particulier, elle est située en dessous de sa tangente au point d'abscisse 1.

D'après la question 4, cette tangente a pour équation :

$$y = x - 1$$

Donc, pour tout $x \in]0;\mathrm{e}^{5/6}]$, on a :

$$f(x) \leq x - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{x^2} \leq x - 1$$

$$\Leftrightarrow x - 1 \geq \frac{\ln(x)}{x^2}$$

7. On pose, pour $x > 0$:

$$g(x) = x - 1 - \frac{\ln(x)}{x^2}$$

On veut montrer que $g(x) \geq 0$ sur $\left[e^{5/6} ; +\infty\right[$.

D'après la question précédente, on sait déjà que :

$$g\left(e^{5/6}\right) \geq 0$$

De plus :

$$g'(x) = 1 - f'(x)$$

Or, sur $\left[e^{5/6} ; +\infty\right[$, on a $x > \sqrt{e}$, donc $f'(x) < 0$. Ainsi :

$$g'(x) = 1 - f'(x) > 0$$

La fonction g est donc croissante sur $\left[e^{5/6} ; +\infty\right[$.

Ainsi, pour tout $x \geq e^{5/6}$, on a :

$$g(x) \geq g\left(e^{5/6}\right) \geq 0$$

Donc :

$$x - 1 - \frac{\ln(x)}{x^2} \geq 0$$

Finalement, pour tout $x \in \left[e^{5/6} ; +\infty\right[$, on a :

$$x - 1 \geq \frac{\ln(x)}{x^2}$$

<u>Partie B</u>

1. Pour $x \geq 1$, on a $\ln(x) \geq 0$, donc :

$$f(x) \geq 0$$

Ainsi, pour tout entier naturel non nul n, l'intégrale

$$I_n = \int_1^n \frac{\ln(x)}{x^2}\, dx$$

représente l'aire, en unités d'aire, du domaine situé sous la courbe $\mathcal{C}_f$, au-dessus de l'axe des abscisses, entre les droites d'équations $x = 1$ et $x = n$.

Pour $n = 1$, cette aire est nulle.

2. Pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^{n} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Or, pour $x \geq 1$, on a $f(x) \geq 0$. Donc :

$$\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$$

Ainsi :

$$I_{n+1} - I_n \geq 0$$

La suite (I_n) est donc croissante.

3. Le premier rectangle, sur l'intervalle $[1; 2]$, a pour hauteur le maximum de la fonction f, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{2\mathrm{e}}$$

Les autres rectangles ont une largeur égale à 1, et pour hauteur $f(i)$, avec i allant de 2 à 9.

Il faut donc compléter le script ainsi :

```
from math import *

S = 1 / (2 * exp(1))
for i in range (2,10) :
    S = S + log(i) / (i**2)
print(S)
```

4. On effectue une intégration par parties avec :

$$u(x) = \ln(x) \qquad u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$v(x) = -\frac{1}{x} \qquad v'(x) = \frac{1}{x^2}$$

Donc :

$$I_n = \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^n - \int_1^n \left(-\frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln(n)}{n} + \int_1^n \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Or :

$$\int_1^n \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n = 1 - \frac{1}{n}$$

Ainsi :

$$I_n = -\frac{\ln(n)}{n} + 1 - \frac{1}{n} = \frac{n - 1 - \ln(n)}{n}$$

5. On utilise l'expression obtenue à la question précédente :

$$I_n = \frac{n - 1 - \ln(n)}{n} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{\ln(n)}{n}$$

Quand n tend vers $+\infty$, on a :

$$\frac{1}{n} \to 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\ln(n)}{n} \to 0$$

Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = 1$$

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé maths au baccalauréat :
www.sujetdebac.fr/annales/specialites/spe-mathematiques/