Corrigé du bac général 2026
Spécialité Mathématiques – Métropole – Jour 1

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2026

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site sujetdebac.fr

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé maths au baccalauréat :
www.sujetdebac.fr/annales/specialites/spe-mathematiques/

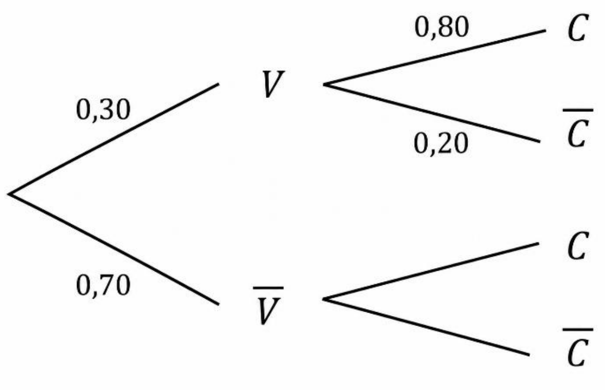
EXERCICE 1 (5 points)

Partie A

1. a. On sait que 75 % des familles réservent une cabine, donc :

$$P(C) = 0{,}75$$

1. b. On complète l'arbre pondéré :



2. On cherche $P(V \cap C)$. D'après l'arbre :

$$P(V \cap C) = P(V) \times P_V(C) = 0{,}30 \times 0{,}80 = 0{,}24$$

La probabilité qu'une famille réserve à la fois un emplacement pour un véhicule et une cabine est donc 0,24, soit 24 %.

3. On cherche $P_C(V)$. Par définition :

$$P_C(V) = \frac{P(V \cap C)}{P(C)} = \frac{0{,}24}{0{,}75} = 0{,}32$$

Sachant qu'une famille a réservé une cabine, la probabilité qu'elle ait aussi réservé un emplacement pour un véhicule est 0,32, soit 32 %.

4. On utilise la formule des probabilités totales :

$$P(C) = P(V \cap C) + P(\overline{V} \cap C) = 0{,}24 + P(\overline{V}) \times P_{\overline{V}}(C)$$

Donc :

$$P_{\overline{V}}(C) = \frac{P(C) - 0{,}24}{P(\overline{V})} = \frac{0{,}75 - 0{,}24}{0{,}70} = \frac{0{,}51}{0{,}70} = \frac{51}{70} \approx 0{,}73$$

Parmi les familles qui ne réservent pas d'emplacement pour un véhicule, environ 73 % réservent une cabine.

Partie B

1. L'espérance de X vaut :

$$E(X) = 0 \times 0{,}19 + 70 \times 0{,}06 + 100 \times 0{,}51 + 170 \times 0{,}24$$
$$= 4{,}2 + 51 + 40{,}8 = 96$$

Pour la variance, on calcule d'abord $E(X^2)$:

$$E(X^2) = 0^2 \times 0{,}19 + 70^2 \times 0{,}06 + 100^2 \times 0{,}51 + 170^2 \times 0{,}24$$
$$= 294 + 5100 + 6936 = 12330$$

Ainsi :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$
$$= 12330 - 96^2 = 12330 - 9216 = 3114$$

2. a. La remise est de 40 %, donc la famille ne paie plus que 60 % du montant initial des suppléments et des extras.

Le montant initial est $X + Y$, donc :

$$Z = 0{,}6(X + Y)$$

2. b. Par linéarité de l'espérance :

$$E(Z) = E\big(0{,}6(X + Y)\big) = 0{,}6(E(X) + E(Y))$$
$$= 0{,}6 \times (96 + 104) = 0{,}6 \times 200 = 120$$

Pour la variance, comme X et Y sont indépendantes :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

Donc :

$$V(Z) = V\big(0{,}6(X + Y)\big) = 0,6^2 V(X + Y)$$
$$= 0{,}36 \times (3114 + 1686) = 0{,}36 \times 4800 = 1728$$

3. a. La variable M_n est définie par :

$$M_n = \frac{Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n}{n}$$

Par linéarité de l'espérance :

$$E(M_n) = \frac{E(Z_1) + E(Z_2) + \cdots + E(Z_n)}{n}$$

Chaque variable Z_i suit la même loi que Z, donc $E(Z_i) = 120$.

Ainsi :

$$E(M_n) = \frac{n \times 120}{n} = 120$$

Pour la variance, les variables $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ sont indépendantes, donc :

$$V(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n) = V(Z_1) + V(Z_2) + \cdots + V(Z_n)$$

Chaque variable Z_i a pour variance 1728, donc :

$$V(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n) = n \times 1728$$

Ainsi :

$$V(M_n) = V\left(\frac{Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \times n \times 1728 = \frac{1728}{n}$$

3. b. On cherche :

$$P(114 < M_n < 126) \geq 0{,}85$$

Or :

$$114 < M_n < 126 \quad \Leftrightarrow \quad |M_n - 120| < 6$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|M_n - 120| \geq 6) \leq \frac{V(M_n)}{6^2}$$

$$\Leftrightarrow P(|M_n - 120| \geq 6) \leq \frac{\frac{1728}{n}}{36} = \frac{48}{n}$$

$$\Leftrightarrow P(|M_n - 120| < 6) \geq 1 - \frac{48}{n}$$

On veut donc :

$$1 - \frac{48}{n} \geq 0{,}85$$

$$\Leftrightarrow \frac{48}{n} \leq 0{,}15$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{48}{0{,}15} = 320$$

Le plus petit entier convenable est donc :

$$n = 320$$

Pour un échantillon d'au moins 320 familles, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'affirmer que la probabilité que le montant moyen payé après réduction soit strictement compris entre 114 € et 126 € est au moins égale à 0,85.

EXERCICE 2 (4 points)

1. a. L'affirmation 1 est vraie.

On a :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-3 \\ 1-0 \\ -3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Un vecteur normal au plan (P) d'équation

$$-x + y - 5z - 0{,}5 = 0$$

est :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$$

Ainsi, $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal au plan (P). La droite (AB) est donc orthogonale au plan (P).

Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées :

$$I\left(\frac{3+2}{2};\frac{0+1}{2};\frac{2+(-3)}{2}\right)$$

$$I(2{,}5; 0{,}5; -0{,}5)$$

On vérifie si I appartient au plan (P) :

$$-2{,}5 + 0{,}5 - 5 \times (-0{,}5) - 0{,}5 = 0$$

Donc le plan (P) passe bien par le milieu du segment $[AB]$.

1. b. L'affirmation 2 est fausse.

Pour un point de la droite (d), on a :

$$x = t \quad \text{et} \quad y = -1{,}5 - t$$

Donc :

$$x + y = \mathrm{t} - 1{,}5 - \mathrm{t} = -1{,}5$$

Pour un point de la droite (AB), en utilisant un paramètre s, on peut écrire :

$$\begin{cases} x = 3 - s \\ y = s \\ z = 2 - 5s \end{cases}$$

Donc, sur la droite (AB) :

$$x + y = 3 - \mathrm{s} + \mathrm{s} = 3$$

Un point ne peut pas vérifier à la fois $x + y = -1{,}5$ et $x + y = 3$. Les droites (d) et (AB) ne sont donc pas sécantes.

1. c. L'affirmation 3 est vraie.

On calcule les vecteurs :

$$\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 3 - 1{,}5 \\ 0 - (-3) \\ 2 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 2 - 1{,}5 \\ 1 - (-3) \\ -3 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Le produit scalaire vaut :

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 1{,}5 \times 0{,}5 + 3 \times 4 + 3 \times (-2) = 6{,}75$$

Les deux normes valent :

$$\| \overrightarrow{CA} \| = \sqrt{1{,}5^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{20{,}25} = 4{,}5$$

$$\| \overrightarrow{CB} \| = \sqrt{0{,}5^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20{,}25} = 4{,}5$$

Donc :

$$\cos\left(\widehat{ACB}\right) = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{\| \overrightarrow{CA} \| \times \| \overrightarrow{CB} \|} = \frac{6{,}75}{4{,}5 \times 4{,}5} = \frac{1}{3}$$

Ainsi :

$$\widehat{ACB} = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70,5°$$

2. L'affirmation 4 est vraie.

Pour la porte A, il faut saisir un code de 3 symboles différents dans un ordre précis. Le nombre de codes possibles est donc :

$$8 \times 7 \times 6 = 336$$

La probabilité que Clotilde ouvre sa porte est donc :

$$\frac{1}{336} \approx 0{,}00297$$

Pour la porte B, il faut choisir 4 symboles différents parmi 8, mais l'ordre n'a pas d'importance. Le nombre de codes possibles est donc :

$$\binom{8}{4} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$$

La probabilité que Titouan ouvre sa porte est donc :

$$\frac{1}{70} \approx 0{,}01428$$

Or :

$$\frac{1}{70} > \frac{1}{336}$$

Titouan a donc plus de chances d'ouvrir sa porte que Clotilde.

EXERCICE 3 (6 points)

Partie A : Phase de chauffage

1. L'équation différentielle est :

$$y' = -0{,}035y + 0{,}91$$

On cherche d'abord la solution constante. Elle vérifie :

$$-0{,}035y + 0{,}91 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{0{,}91}{0{,}035} = 26$$

Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions définies sur $[0; +\infty[$ par :

$$y(t) = 26 + Ce^{-0{,}035t}$$

où C est un réel.

2. On sait que $T(0) = 18$. Or :

$$T(0) = 26 + Ce^{0} = 26 + C$$

Donc :

$$26 + C = 18$$

$$\Leftrightarrow C = 18 - 26 = -8$$

Ainsi, pour tout $t \in [0; +\infty[$:

$$T(t) = 26 - 8e^{-0{,}035t}$$

3. On cherche l'instant t tel que $T(t) = 20$.

$$26 - 8e^{-0,035t} = 20$$

$$\Leftrightarrow 8e^{-0,035t} = 6$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,035t} = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow -0,035t = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}{0,035} \approx 8,22$$

Comme t est exprimé en dizaines de minutes, cela correspond à environ :

$$8,22 \times 10 = 82,2$$

La pièce atteindra donc 20°C au bout d'environ 82 minutes, soit environ 1 h 22 min.

4. Pour tout $t \geq 0$, on a :

$$e^{-0,035t} > 0$$

Donc :

$$T(t) = 26 - 8e^{-0,035t} < 26$$

La température reste donc toujours strictement inférieure à 26°C. Elle ne pourra donc pas dépasser 28°C selon ce modèle.

Partie B : Phas de refroidissement

1. On calcule u_1 à partir de la formule de récurrence :

$$u_1 = 0,965u_0 + 0,35 + 0,07e^{-0,1\times 0}$$

Comme $u_0 = 20$ et $e^0 = 1$, on obtient :

$$u_1 = 0,965 \times 20 + 0,35 + 0,07 = 19,3 + 0,42 = 19,72$$

2. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > 10$.

Initialisation : pour $n = 0$,

$$u_0 = 20 > 10$$

La propriété est donc vraie au rang 0.

Hérédité : supposons que, pour un entier naturel n, on ait :

$$u_n > 10$$

Alors :

$$u_{n+1} = 0{,}965u_n + 0{,}35 + 0{,}07e^{-0{,}1n}$$

Comme $u_n > 10$ et $e^{-0{,}1n} > 0$, on a :

$$u_{n+1} > 0{,}965 \times 10 + 0{,}35$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} > 9{,}65 + 0{,}35$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} > 10$$

La propriété est donc héréditaire.

<u>Conclusion</u> :

Par récurrence, pour tout entier naturel n :

$$u_n > 10$$

3. On admet que la suite (u_n) est décroissante. D'après la question précédente, elle est minorée par 10.

Une suite décroissante et minorée est convergente. Donc la suite (u_n) est convergente.

4. a. On note ℓ la limite de la suite (u_n).

Comme (u_n) converge vers ℓ, la suite (u_{n+1}) converge aussi vers ℓ. De plus :

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-0{,}1n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e^{0{,}1n}} = 0$$

En passant à la limite dans la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 0{,}965u_n + 0{,}35 + 0{,}07e^{-0{,}1n}$$

on obtient :

$$\ell = 0{,}965\ell + 0{,}35$$

4. b. On résout :

$$\ell = 0{,}965\ell + 0{,}35$$

$$\Leftrightarrow 0{,}035\ell = 0{,}35$$

$$\Leftrightarrow \ell = 10$$

Selon ce modèle, si le chauffage ne se remettait pas en marche, la température de la pièce tendrait vers 10°C. En pratique, le chauffage se remettra en marche avant, dès que la température sera inférieure ou égale à 18°C.

5. a. Le programme peut être complété ainsi :

```
def marche() :
   n = 0
   u = 20
   while u > 18 :
      u = 0.965*u + 0.35 + 0.07*exp(-0.1*n)
      n = n + 1
   return n
```

5. b. On calcule les valeurs successives de la suite jusqu'à passer sous 18.

$$u_7 \approx 18{,}12$$

$$u_8 \approx 17{,}87$$

Ainsi, la température devient inférieure ou égale à 18°C à partir de $n = 8$.

Le chauffage se remettra donc en marche au bout de 8 dizaines de minutes, c'est-à-dire après environ 80 minutes, soit 1 h 20 min.

EXERCICE 4 (5 points)

Partie A

1. Le point $A(0; 1)$ appartient à la courbe représentative de f, donc :

$$f(0) = 1$$

Or :

$$f(0) = a + \frac{b\ln(1)}{1}$$

Comme $\ln(1) = 0$, on obtient :

$$f(0) = a$$

Donc :

$$a = 1$$

2. a. Le nombre $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente T_A à la courbe au point A.

D'après le graphique, la tangente T_A a pour coefficient directeur : 4.

Donc :

$$f'(0) = 4$$

2. b. D'après le graphique, autour du point d'abscisse 1, la courbe est tournée vers le bas : sa pente diminue.

Cela signifie que la fonction dérivée f' est décroissante autour de 1, donc :

$$f''(1) < 0$$

3. a. Pour tout $x \in]-1; +\infty[$, on a :

$$f(x) = a + b\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

On dérive la fonction :

$$\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

En posant $u(x) = \ln(x+1)$ et $v(x) = x+1$, on a :

$$u'(x) = \frac{1}{x+1} \qquad \text{et} \qquad v'(x) = 1$$

Donc :

$$\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)' = \frac{\frac{1}{x+1}(x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

Ainsi :

$$f'(x) = \frac{b(1 - \ln(x+1))}{(x+1)^2}$$

3. b. En utilisant la formule précédente avec $x = 0$, on obtient :

$$f'(0) = \frac{b(1 - \ln(1))}{1^2} = b$$

Or, d'après la question 2.a :

$$f'(0) = 4$$

Donc :

$$b = 4$$

Partie B

1. On étudie la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

$$f(x) = 1 + \frac{4\ln(x+1)}{x+1}$$

Or :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{X \to +\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$$

Donc :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

La droite d'équation $y = 1$ est donc une asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$.

2. On résout sur $]-1; +\infty[$:

$$1 - \ln(x+1) > 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x+1) < 1$$

Comme la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, cela équivaut à :

$$\Leftrightarrow x + 1 < e$$

$$\Leftrightarrow x < e - 1$$

En tenant compte du domaine de définition, la solution est :

$$]-1; e-1[$$

3. On a :

$$f'(x) = \frac{4(1 - \ln(x+1))}{(x+1)^2}$$

Sur $]-1; +\infty[$, le dénominateur $(x+1)^2$ est strictement positif. Le signe de $f'(x)$ est donc celui de :

$$1 - \ln(x+1)$$

D'après la question précédente :

- $f'(x) > 0$ sur $]-1; e-1[$
- $f'(e-1) = 0$
- $f'(x) < 0$ sur $]e-1; +\infty[$

On sait aussi que :

$$\lim_{x \to -1} f(x) = -\infty$$

et, d'après la question 1 :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

Enfin, on calcule l'extremum :

$$f(e-1) = 1 + \frac{4\ln(e)}{e} = 1 + \frac{4}{e}$$

On obtient ainsi le tableau de variation complet suivant :

x	-1		$e-1$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$1+\frac{4}{e}$	$\searrow$	1

4. Sur l'intervalle $[2; +\infty[$, on a $2 > e - 1 \approx 1{,}718$. La fonction f est donc continue et strictement décroissante sur $[2; +\infty[$.

De plus :

$$f(2) = 1 + \frac{4\ln(3)}{3} \approx 2{,}46$$

Donc :

$$f(2) > 1{,}5$$

Et :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1{,}5$ admet une solution dans $[2; +\infty[$.

Comme f est strictement décroissante sur cet intervalle, cette solution est unique.

À la calculatrice, on obtient :

$$x \approx 25{,}1$$

5. a. On remarque que :

$$\left(\frac{1}{2}(\ln(x+1))^2\right)' = \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

Donc :

$$\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,dx = \left[\frac{1}{2}(\ln(x+1))^2\right]_0^2 = \frac{1}{2}(\ln 3)^2 - \frac{1}{2}(\ln 1)^2$$

Comme $\ln(1) = 0$, on obtient :

$$\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,dx = \frac{1}{2}(\ln 3)^2$$

5. b. Sur l'intervalle $[0; 2]$, la fonction f est positive. L'aire demandée est donc :

$$\int_0^2 f\,(x)\,dx$$

Or :

$$\int_0^2 f\,(x)\,dx = \int_0^2 \left(1 + \frac{4\ln(x+1)}{x+1}\right) dx = \int_0^2 1\;dx + 4\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,dx$$

$$= 2 + 4 \times \frac{1}{2}(\ln 3)^2 = 2 + 2(\ln 3)^2$$

L'aire du domaine est donc :

$$2 + 2(\ln 3)^2 \approx 4{,}41 \text{ unités d'aire.}$$

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé maths au baccalauréat :
www.sujetdebac.fr/annales/specialites/spe-mathematiques/