

Corrigé du bac général 2026

Spécialité Mathématiques – Métropole

Remplacement – Jour 1

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2026

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site sujetdebac.fr

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé maths au baccalauréat :

www.sujetdebac.fr/Annales/specialites/spe-mathematiques/

EXERCICE 1 (5 points)

Partie A

1. Pour qu'une livraison soit effectuée par un livreur expérimenté et que le délai soit respecté, on utilise la formule des probabilités conditionnelles :

$$P(E \cap R) = P(E) \times P_E(R) = 0,60 \times 0,95 = 0,570$$

La probabilité qu'une livraison soit effectuée par un livreur expérimenté et respecte le délai est donc de 0,570.

2. Les événements E et $\bar{E}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(R) &= P(E) \times P_E(R) + P(\bar{E}) \times P_{\bar{E}}(R) \\ &= 0,570 + (1 - 0,60) \times 0,75 = 0,570 + 0,300 = 0,870 \end{aligned}$$

Ainsi, une livraison choisie au hasard respecte le délai avec une probabilité de 0,870, soit 87 %.

3. On cherche la probabilité conditionnelle $P_R(E)$. On a :

$$P_R(E) = \frac{P(E \cap R)}{P(R)} = \frac{0,570}{0,870} \approx 0,655$$

Sachant que le délai a été respecté, la probabilité que la livraison ait été effectuée par un livreur expérimenté est donc d'environ 0,655, soit 65,5 %.

Partie B

1. On considère 200 livraisons effectuées par un livreur expérimenté. Pour chacune d'elles, le délai est respecté avec la même probabilité $p = 0,95$. Le choix de l'échantillon étant assimilé à des tirages successifs avec remise, les épreuves peuvent être considérées comme indépendantes.

La variable aléatoire X compte le nombre de succès parmi 200 épreuves de Bernoulli indépendantes de même probabilité de succès. Ainsi :

$$X \sim \mathcal{B}(200; 0,95)$$

2. Cet événement correspond à $X = 200$. Sa probabilité vaut :

$$P(X = 200) = \binom{200}{200} 0,95^{200} 0,05^0 = 0,95^{200} > 0$$

L'événement n'est pas impossible, car il est supérieur à 0, mais il est très peu probable.

3. À la calculatrice, pour $X \sim \mathcal{B}(200; 0,95)$:

$$P(X \geq 190) = 1 - P(X \leq 189) \approx 0,583$$

Il y a donc environ 58,3 % de chances qu'au moins 190 des 200 livraisons, c'est-à-dire au moins 95 % d'entre elles, respectent le délai.

Partie C

1. Pour une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$, on utilise :

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1 - p)$$

Pour $X_A \sim \mathcal{B}(120; 0,85)$, on a :

$$E(X_A) = 120 \times 0,85 = 102$$

$$V(X_A) = 120 \times 0,85 \times (1 - 0,85) = 102 \times 0,15 = 15,3$$

Pour $X_B \sim \mathcal{B}(80; 0,90)$, on a :

$$E(X_B) = 80 \times 0,90 = 72$$

$$V(X_B) = 80 \times 0,90 \times (1 - 0,90) = 72 \times 0,10 = 7,2$$

2. Comme $S = X_A + X_B$, la linéarité de l'espérance donne :

$$E(S) = E(X_A) + E(X_B) = 102 + 72 = 174$$

3. L'énoncé précise que les livraisons effectuées dans une zone n'ont pas d'incidence sur celles effectuées dans l'autre. On considère donc les variables aléatoires X_A et X_B comme indépendantes. Or, lorsque deux variables aléatoires sont indépendantes, la variance de leur somme est égale à la somme de leurs variances.

Dans ce cas, on a :

$$V(S) = V(X_A) + V(X_B) = 15,3 + 7,2 = 22,5$$

4. On sait que $E(S) = 174$ et $V(S) = 22,5$. L'intervalle demandé est centré en 174 :

$$S \in [165; 183] \quad \Leftrightarrow \quad |S - 174| \leq 9$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|S - 174| \geq 9) \leq \frac{22,5}{9^2} = \frac{22,5}{81} \approx 0,278$$

Comme l'événement $|S - 174| > 9$ est inclus dans l'événement $|S - 174| \geq 9$, on obtient :

$$P(S \in [165; 183]) = P(|S - 174| \leq 9) \geq 1 - \frac{22,5}{81} \approx 0,722$$

Ainsi, la probabilité que le nombre total de livraisons respectant les délais soit compris entre 165 et 183 est au moins égale à 0,722, soit 72,2 %.

EXERCICE 2 (5 points)

Partie A

1. Pour tout réel $x > -3$, on dérive le quotient :

$$f'(x) = \frac{2 \times (x + 3) - 2x \times 1}{(x + 3)^2} = \frac{6}{(x + 3)^2}$$

Comme $(x + 3)^2 > 0$, on a $f'(x) > 0$. La fonction f est donc croissante sur $] -3 ; +\infty[$.

2. On démontre par récurrence la propriété $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.

Initialisation :

Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et :

$$u_1 = f(u_0) = f(1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Donc :

$$0 \leq u_1 \leq u_0 \leq 1$$

La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité :

Supposons qu'elle soit vraie à un rang n , c'est-à-dire :

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$$

La fonction f étant croissante, on peut appliquer f aux trois premiers membres de cette inégalité :

$$f(0) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

De plus, l'hypothèse de récurrence donne $u_{n+1} \leq 1$. Ainsi :

$$0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 1$$

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion :

Par récurrence, pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$$

3. D'après la question précédente, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. Elle est donc convergente.

Partie B

1. Pour tout entier naturel n , on a :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{\frac{2u_n}{u_n+3}} = \frac{u_n+3}{2u_n} = \frac{\cancel{u_n}}{2\cancel{u_n}} + \frac{3}{2u_n} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2u_n} = \frac{3}{2}v_n + \frac{1}{2}$$

2. Pour tout entier naturel n :

$$w_{n+1} = v_{n+1} + 1 = \frac{3}{2}v_n + \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}v_n + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}(v_n + 1) = \frac{3}{2}w_n$$

La suite (w_n) est donc géométrique de raison $3/2$.

De plus :

$$w_0 = v_0 + 1 = \frac{1}{u_0} + 1 = \frac{1}{1} + 1 = 2$$

Son premier terme est donc $w_0 = 2$.

3. D'après la question précédente, on a :

$$w_n = 2 \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Or $v_n = w_n - 1$, donc :

$$v_n = 2 \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1$$

Comme $v_n = \frac{1}{u_n}$, on en déduit :

$$u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{2 \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}$$

4. Comme $\frac{3}{2} > 1$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$$

Ainsi, le dénominateur de l'expression de u_n tend vers $+\infty$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

5. a. Le script complété est :

```
def seuil():  
    n = 0  
    u = 1  
    while u > 10**(-3):  
        n = n + 1  
        u = 2*u/(u + 3)  
    return n
```

5. b. On cherche le premier entier n pour lequel $u_n \leq 10^{-3}$. À l'aide de l'expression obtenue à la question 3, on trouve :

$$u_{15} \approx 0,001143 > 10^{-3}$$

$$u_{16} \approx 0,000762 \leq 10^{-3}$$

La fonction seuil() renvoie donc 16.

EXERCICE 3 (4 points)

1. Pour montrer que les trois vecteurs forment une base de l'espace, on vérifie qu'ils sont linéairement indépendants. On considère trois réels a , b et c tels que :

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$$

En utilisant les coordonnées des vecteurs, on obtient le système :

$$\begin{cases} a + 2c = 0 \\ b + c = 0 \\ 2a + 3b = 0 \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent $a = -2c$ et $b = -c$. En remplaçant dans la troisième équation, on obtient :

$$-4c - 3c = 0$$

$$\Leftrightarrow -7c = 0$$

$$\Leftrightarrow c = 0$$

Ainsi, $c = 0$, puis $a = 0$ et $b = 0$. La famille formée par les trois vecteurs est donc libre. Comme elle contient trois vecteurs de l'espace, elle forme une base de l'espace.

L'affirmation 1 est vraie.

2. On calcule les vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

On vérifie alors les deux produits scalaires :

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \times 1 + 3 \times (-2) + (-3) \times (-2) = 0$$

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \times (-1) + 3 \times (-1) + (-3) \times (-1) = 0$$

Les points A , B et C n'étant pas alignés, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ donnent deux directions non colinéaires du plan (ABC) . Comme le vecteur directeur $\overrightarrow{CD}$ est orthogonal à ces deux directions, la droite (CD) est orthogonale au plan (ABC) .

L'affirmation 2 est vraie.

3. Pour $t = 1$, la représentation paramétrique de la droite donne les coordonnées $M(2 ; 2 ; -1)$. Ainsi, le point M appartient bien à la droite d .

Le plan P_1 a pour vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Comme $\overrightarrow{EM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on calcule :

$$\overrightarrow{EM} \cdot \vec{n} = 1 \times 1 + 1 \times (-2) + 0 \times 3 = -1 \neq 0$$

Le vecteur $\overrightarrow{EM}$ n'est donc pas orthogonal au vecteur normal du plan, ce qui montre que M n'appartient pas à P_1 . M ne peut donc pas être le point d'intersection annoncé.

L'affirmation 3 est fausse.

4. On vérifie d'abord que H appartient au plan P_2 :

$$1 + 2(-2) - 2 \times 0 + 3 = 0$$

C'est le cas, H appartient bien au plan P_2 .

De plus :

$$\overrightarrow{NH} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Or le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P_2 . Ainsi, la droite (NH) est orthogonale au plan P_2 et H est le projeté orthogonal de N sur ce plan.

On peut également calculer la longueur NH :

$$NH^2 = (-1)^2 + (-2)^2 + 2^2 = 9$$

Comme NH est une longueur, on a $NH = 3$. Ainsi :

$$d(N ; P_2) = NH = 3$$

La distance de N au plan est donc bien égale à NH .

L'affirmation 4 est vraie.

EXERCICE 4 (6 points)

Partie A

1. L'équation (E') s'écrit :

$$\begin{aligned} 2y' + 3y &= 0 \\ \Leftrightarrow 2y' &= -3y \\ \Leftrightarrow y' &= -\frac{3}{2}y \end{aligned}$$

Ses solutions sur $[0 ; +\infty[$ sont donc de la forme :

$$y(t) = Ce^{-\frac{3}{2}t}$$

où $C \in \mathbb{R}$.

2. La fonction f étant une solution de (E) , elle vérifie :

$$2f'(t) + 3f(t) = 8e^{-\frac{3}{2}t}$$

Pour toute fonction g définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$, on a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} &g \text{ solution de } (E) \\ \Leftrightarrow &2g' + 3g = 2f' + 3f \\ \Leftrightarrow &2(g - f)' + 3(g - f) = 0 \\ \Leftrightarrow &g - f \text{ solution de } (E') \end{aligned}$$

L'équivalence demandée est donc démontrée.

3. D'après la question précédente, g est solution de (E) si et seulement si $g - f$ est solution de (E') . Il existe donc un réel C tel que :

$$\begin{aligned} g(t) &= 4te^{-\frac{3}{2}t} + Ce^{-\frac{3}{2}t} \\ &= (4t + C)e^{-\frac{3}{2}t} \end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de (E) sont les fonctions définies par cette expression, avec $C \in \mathbb{R}$.

4. On impose maintenant $g(0) = 0$. Or :

$$g(0) = (4 \times 0 + C)e^0 = C$$

Il faut donc $C = 0$. La seule solution de (E) qui s'annule en 0 est :

$$g(t) = 4te^{-\frac{3}{2}t}$$

Partie B

1. On a :

$$f(t) = 4te^{-\frac{3}{2}t} = \frac{4t}{e^{\frac{3}{2}t}}$$

Posons :

$$X = \frac{3}{2}t \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}X$$

Par conséquent :

$$f(t) = \frac{4t}{e^{\frac{3}{2}t}} = \frac{8X}{3e^X} = \frac{8}{3} \times \frac{X}{e^X}$$

Par croissance comparée, on a :

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$$

Donc :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \frac{8}{3} \times 0 = 0$$

À long terme, la quantité de médicament présente dans le sang tend donc vers 0 mg.

2. a. Pour tout réel $t \geq 0$, on dérive le produit :

$$\begin{aligned} f'(t) &= 4e^{-\frac{3}{2}t} + 4t \left(-\frac{3}{2} e^{-\frac{3}{2}t} \right) \\ &= 4e^{-\frac{3}{2}t} - 6te^{-\frac{3}{2}t} \\ &= (4 - 6t)e^{-\frac{3}{2}t} \end{aligned}$$

2. b. Pour tout $t \geq 0$, le facteur exponentiel est strictement positif. Le signe de $f'(t)$ est donc celui de $4 - 6t$. Or :

$$4 - 6t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$$

Ainsi, f est croissante sur $[0 ; 2/3]$ puis décroissante sur $[2/3 ; +\infty[$.

De plus, on a :

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f\left(\frac{2}{3}\right) &= \frac{8}{3e} \approx 0,981 \end{aligned}$$

On obtient le tableau de variation suivant :

t	0	$2/3$	$+\infty$
$4 - 6t$	+	0	−
$f'(t)$	+	0	−
$f(t)$	0	0,981	0

2. c. La quantité est maximale pour $t = \frac{2}{3}$ heure. On convertit en minutes :

$$\frac{2}{3} \times 60 = 40$$

Soit 40 minutes après la prise du comprimé.

3. La fonction f est continue sur $[1 ; 3]$ et, d'après la question précédente, elle y est strictement décroissante.

De plus :

$$f(1) = 4e^{-\frac{3}{2}} \approx 0,893 > 0,5$$

$$f(3) = 12e^{-\frac{9}{2}} \approx 0,133 < 0,5$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, complété par la stricte décroissance de f , l'équation $f(t) = 0,5$ admet une unique solution α sur $[1 ; 3]$.

À la calculatrice :

$$f(1,76) \approx 0,502 > 0,5$$

$$f(1,77) \approx 0,498 < 0,5$$

Comme f est décroissante, on a l'encadrement suivant :

$$1,76 < \alpha < 1,77$$

4. Pour la condition 1, au bout de 2 heures la quantité présente est :

$$f(2) = 8e^{-3} \approx 0,398 \text{ mg}$$

Cette quantité est inférieure à $0,5 \text{ mg}$, c'est-à-dire à 50 % du comprimé de 1 mg. La condition 1 est donc réalisée.

Pour la condition 2, on doit calculer la quantité moyenne de médicament présente entre 1 heure et 3 heures. Cette moyenne vaut :

$$M = \frac{1}{3-1} \int_1^3 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_1^3 f(t) dt$$

On commence donc par déterminer une primitive de $f(t)$.

Comme f est le produit d'un polynôme de degré 1 et d'une fonction exponentielle, on cherche une primitive F sous la forme :

$$F(t) = (at + b)e^{-\frac{3}{2}t}$$

où a et b sont deux réels à déterminer.

On dérive F :

$$\begin{aligned} F'(t) &= ae^{-\frac{3}{2}t} + (at + b)\left(-\frac{3}{2}\right)e^{-\frac{3}{2}t} \\ &= \left(a - \frac{3}{2}at - \frac{3}{2}b\right)e^{-\frac{3}{2}t} \\ &= \left(-\frac{3}{2}at + a - \frac{3}{2}b\right)e^{-\frac{3}{2}t} \end{aligned}$$

On veut avoir $F'(t) = f(t)$, donc :

$$\begin{aligned} \left(-\frac{3}{2}at + a - \frac{3}{2}b\right)e^{-\frac{3}{2}t} &= 4te^{-\frac{3}{2}t} \\ \Leftrightarrow \left(-\frac{3}{2}at + a - \frac{3}{2}b\right) &= 4t \end{aligned}$$

Pour que les deux expressions soient égales pour tout t , on doit avoir le même coefficient devant t et le même terme constant.

Ainsi, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \left(-\frac{3}{2}a\right)t + \left(a - \frac{3}{2}b\right) &= 4t + 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2}a &= 4 \\ a - \frac{3}{2}b &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La première égalité donne :

$$a = 4 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{3}$$

Puis la seconde donne :

$$b = -a \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3} \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{16}{9}$$

Une primitive de f est donc :

$$F(t) = \left(-\frac{8}{3}t - \frac{16}{9}\right)e^{-\frac{3}{2}t}$$

On peut alors calculer la quantité moyenne :

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2}(F(3) - F(1)) \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{8}{9}(3 \times 3 + 2)e^{-\frac{9}{2}} + \frac{8}{9}(3 \times 1 + 2)e^{-\frac{3}{2}} \right] \\ &= -\frac{44}{9}e^{-\frac{9}{2}} + \frac{20}{9}e^{-\frac{3}{2}} \approx 0,442 \text{ mg} \end{aligned}$$

Comme $0,442 > 0,40$, la condition 2 n'est pas réalisée. L'essai clinique n'est donc pas validé.

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé maths au baccalauréat :

www.sujetdebac.fr/Annales/specialites/spe-mathematiques/