

Exercice 1 :

Partie A :

1) D'après l'énoncé :

- $P(M) = 0,8$

Ainsi : $P(\bar{M}) = 1 - P(M) = 1 - 0,8 = 0,2$

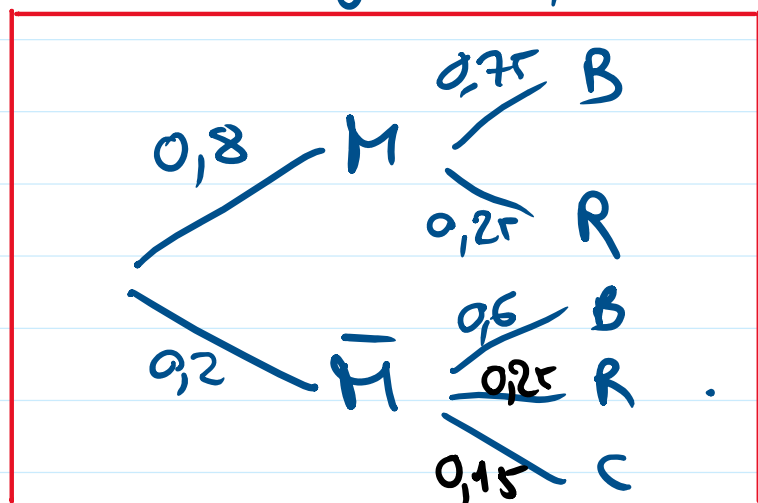
- $P_M(B) = 0,75$

Donc $P_M(R) = 1 - P_M(B) = 1 - 0,75 = 0,25$.

- $P_{\bar{M}}(B) = 0,6$

Pour l'instant, nous n'avons pas accès aux valeurs de $P_{\bar{M}}(R)$ et $P_{\bar{M}}(C)$.

On peut déjà compléter :



NB: Les autres valeurs sont complétées sur cet arbre, mais en noir.

sur cet arbre, mais en noir.

2) a)

$$\text{On a : } P(\bar{H} \cap R) = 0,05.$$

Cela signifie que la probabilité pour qu'une planche soit en résine et soit recyclée est de 0,05.

b) On cherche $P_{\bar{H}}(C)$

$$\text{D'abord, on a : } P_{\bar{H}}(C) = 1 - (P_{\bar{H}}(R) + P_{\bar{H}}(B))$$

Il manque la valeur de $P_{\bar{H}}(R)$.

Or, par définition,

$$\begin{aligned} P_{\bar{H}}(R) &= \frac{P(\bar{H} \cap R)}{P(\bar{H})} \\ &= \frac{0,05}{0,2} \leftarrow \begin{array}{l} \text{énoncé} \\ \text{question 1.} \end{array} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } P_{\bar{H}}(R) = 0,25.$$

$$\text{Or, d'après 1), } P_{\bar{H}}(B) = 0,6.$$

Or, d'après 1), $P_{\bar{H}}(B) = 0,6$.

$$\begin{aligned}\text{Donc: } P_{\bar{H}}(C) &= 1 - (P_H(B) + P_H(A)) \\ &= 1 - (0,6 + 0,25) \\ &= 1 - 0,85 \\ P_{\bar{H}}(C) &= 0,15\end{aligned}$$

NB: À partir de là, on peut entièrement compléter l'arbre de probabilités en 1)

Ainsi, en ayant choisi une planche en résine, la probabilité pour qu'elle soit consolidée pour la saison suivante est bien de 0,15.

3) On cherche $P(B)$

Les événements H et $\bar{H}$ forment un système complet d'événements (ou une partition de l'univers).

Donc, d'après la formule des probabilités totales:

$$\begin{aligned}P(B) &= P(H \cap B) + P(\bar{H} \cap B) \\ &= P(H)P_H(B) + P(\bar{H})P_{\bar{H}}(B).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Ainsi, } P(B) &= 0,8 \times 0,75 + 0,2 \times 0,6 \\ &= 0,6 + 0,12 \\ P(B) &= 0,72\end{aligned}$$

$$= 0,6 + 0,12$$

$$P(B) = 0,72.$$

Or, $\frac{3}{4} = 0,75 > 0,72.$

Donc, la gérante a tort.

Partie B:

1) Dans ce jeu, il n'y a ni ordre ni répétition dans le tirage des boules. On utilisera donc des combinaisons.

- Nombre de tirages possibles :

Dans l'urne, il y a $n+5$ boules (n boules rouges et 5 boules noires).

On prend 2 boules dans l'urne simultanément.

Il y a donc $\binom{n+5}{2}$ tirages possibles.

- Nombre de tirages gagnants :

Pour gagner, il y a deux possibilités:

- Soit on pioche deux boules rouges
- Soit on pioche deux boules noires.

→ Nombre de tirage de deux boules rouges.

→ Nombre de tirages de deux boules rouges :
Il y a n boules rouges dans l'urne et on en tire deux.
Cela donne $\binom{n}{2}$ possibilités.

→ Nombre de tirages de deux boules noires :
Il y a 5 boules noires dans l'urne et on en tire 2.
Cela donne : $\binom{5}{2}$ possibilités.

Les deux cas traités sont disjoints donc le nombre de tirages gagnants est de $\binom{5}{2} + \binom{n}{2}$.

Comme les boules sont indiscernables au toucher, on a une probabilité uniforme sur les tirages.

Ainsi : $p = \frac{\text{nombre de tirages gagnants}}{\text{nombre de tirages possibles}}$.

Donc,

$$p = \frac{\binom{5}{2} + \binom{n}{2}}{\binom{n+5}{2}}.$$

2) On a:

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \frac{\binom{5}{2} + \binom{n}{2}}{\binom{n+5}{2}} = \frac{\frac{5!}{2!(5-2)!} + \frac{n!}{2!(n-2)!}}{\frac{(n+5)!}{2!(n+5-2)!}} \\
 &= \frac{\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1} + \frac{n(n-1)(n-2) \times \dots \times 2}{2 \times (n-2) \times \dots \times 2}}{\frac{(n+5)(n+4)(n+3) \times \dots \times 2}{2 \times (n+3) \times \dots \times 2}} \\
 &= \frac{\frac{20}{2} + \frac{n(n-1)}{2}}{\frac{(n+5)(n+4)}{2}} \\
 &= \frac{20 + n(n-1)}{2} \times \frac{2}{(n+5)(n+4)}
 \end{aligned}$$

Donc,

$$\gamma = \frac{20 + n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$$

3) On cherche n tel que $\gamma < \frac{1}{2}$,

c'est-à-dire $\frac{20 + n(n-1)}{(n+5)(n+4)} < \frac{1}{2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
 \frac{20 + n(n-1)}{(n+5)(n+4)} &< \frac{1}{2} \quad (\Rightarrow 2(20 + n(n-1)) < (n+5)(n+4)) \\
 &\quad (\times 2 \quad (n+5)(n+4) > 0)
 \end{aligned}$$

$$(m+5)(m+4)$$

$$(\times 2 (m+5)(m+4) > 0)$$

$$\Leftrightarrow 40 + 2m^2 - 2m < m^2 + 5m + 4m + 20$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 11m + 20 < 0$$

On résout l'inéquation $x^2 - 11x + 20 < 0$ sur $\mathbb{R}$ afin d'en trouver les solutions entières

$x \mapsto x^2 - 11x + 20$ est une fonction polynôme de degré 2 avec $a=1$, $b=-11$ et $c=20$.

Calcul du discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

$$= (-11)^2 - 4 \times 1 \times 20$$

$$= 121 - 80$$

$$\Delta = 41 > 0$$

Il y a donc deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{11 + \sqrt{41}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{11 - \sqrt{41}}{2}$$

On a, d'après la calculatrice :

$$x_1 \approx 8,7 \quad \text{et} \quad x_2 \approx 2,3$$

Comme $a > 0$, la fonction est négative à l'intérieur des racines.

Les solutions de la première inéquation sont donc les entiers n tels que :

$$x_2 < n < x_1.$$

Donc, $S = \{3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

Ainsi, la gérante peut mettre entre 3 et 8 heures rouges dans l'urne.

Exercice 2:

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{-x} + e^{-x}$
 $= \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}.$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ par croissance comparée

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ donc par quotient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

Donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Ainsi l'affirmation est fautive.

Ainsi, l'affirmation est fausse

2) g est 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \\ g'(x) = e^x + xe^x$$

$$g''(x) = e^x + e^x + xe^x = (x+2)e^x$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$

Donc, g'' est du signe de $x \mapsto x+2$ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$

Donc, g'' est positive sur $[-2; +\infty[$.

Donc, g est convexe sur $[-2; +\infty[$

Ainsi, l'affirmation est vraie

3) Pour tout $x \in [0; \pi]$, $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sin(x) \geq 0 \end{cases}$

Donc, $x \sin(x) \geq 0$

Donc, par positivité de l'intégrale, $\int_0^\pi x \sin(x) dx \geq 0$

Donc, par positivité de $e^{\cos(x)}$,

$$\int_0^{\pi} x \sin(x) dx > 0$$

Or, $-\pi < 0$ donc $\int_0^{\pi} x \sin(x) dx \neq -\pi$

Donc, l'affirmation est fausse.

4) h est dérivable sur $\mathbb{R}$

D'une part:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = -3e^{2x}$

D'autre part:

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, 2h(x) - 5 &= 2\left(-\frac{3}{2}e^{2x} + \frac{5}{2}\right) - 5 \\ &= -3e^{2x} + 5 - 5 \\ 2h(x) - 5 &= -3e^{2x} \end{aligned}$$

On a: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 2h(x) - 5$.

Donc, h est solution de (E)

$$\text{De plus, } h(0) = -\frac{3}{2}e^0 + \frac{5}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1.$$

Donc, l'affirmation est vraie.

5) Reprenons pas à pas l'exécution de mystère (5).

Initialement, $f = 1$

k	Nouvelle valeur de f .
1	$f \times k = 1 \times 1 = 1 \rightarrow f = 1$
2	$f \times k = 1 \times 2 = 2 \rightarrow f = 2$
3	$f \times k = 2 \times 3 = 6 \rightarrow f = 6$
4	$f \times k = 6 \times 4 = 24 \rightarrow f = 24$
5	$f \times k = 24 \times 5 = 120 \rightarrow f = 120.$

On obtient bien 120.

Donc, l'affirmation est vraie.

Exercice 3:

Partie A:

1) On utilise la relation de récurrence:

$$\begin{aligned}u_1 &= \ln(3u_0^2 + 1) \\&= \ln(3 \times 2^2 + 1) \\&= \ln(12 + 1)\end{aligned}$$

$$= \ln(12+1)$$

$$= \ln(13)$$

$$u_1 = \ln(13)$$

2) D'après le graphique, il semble que (u_n) soit croissante et converge vers un réel proche de 3,8.

3) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.

Initialisation :

$$u_1 = \ln(13)$$

$$u_0 = 2$$

D'après la calculatrice, $\ln(13) \approx 2,56$.

Donc,

$$2 \leq 2 \leq \ln(13) \leq 4.$$

$$\text{d'où } 2 \leq u_0 \leq u_1 \leq 4$$

Donc, la propriété est vraie au rang $n=0$.

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la propriété soit vraie. Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

D'après l'hypothèse de récurrence :

Après un type, on a la relation :

$$2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$$

Les membres sont positifs. On applique, croissant sur $[0; +\infty[$ d'après l'énoncé :

$$f(2) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(4)$$

donc

$$\ln(13) \leq \ln(3u_n^2 + 1) \leq \ln(3u_{n+1}^2 + 1) \leq \ln(3 \times 4^2 + 1)$$

d'où

$$\ln(13) \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \ln(49)$$

d'après la relation de récurrence

Or, on a vu dans l'initialisation

que $\ln(13) \geq 2$

$\ln(49) \approx 3,9$ d'après la calculatrice

donc $\ln(49) \leq 4$.

Ainsi :

$$2 \leq \ln(13) \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \ln(49) \leq 4.$$

D'où : $2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$.

La propriété est héréditaire.

Conclusion : La propriété est vraie au rang $n=1$ et elle est héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc, $\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, 2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.

Donc, $\boxed{\text{pour tout } m \in \mathbb{N}, 2 \leq u_m \leq u_{m+1} \leq 4.}$

4.) D'après la question précédente, on peut écrire:

$$\text{pour tout } m \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_m \leq u_{m+1} \\ u_m \leq 4. \end{cases}$$

Donc, la suite (u_m) est croissante et majorée par 4.

Donc, d'après le théorème de convergence des suites monotones, $\boxed{\text{la suite } (u_m) \text{ converge.}}$

Partie B:

1)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{6x}{3x^2 + 1} - 1 \\ &= \frac{6x - (3x^2 + 1)}{3x^2 + 1} \end{aligned}$$

$$\boxed{g'(x) = \frac{-3x^2 + 6x - 1}{3x^2 + 1}}$$

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $3x^2 \geq 0$
donc $3x^2 + 1 \geq 1 > 0$.

Donc, g' est du signe de $f: x \mapsto -3x^2 + 6x - 1$
sur $\mathbb{R}$.

Étudions le signe de f .

f est une fonction polynôme de degré 2
avec $a = -3$, $b = 6$ et $c = -1$

Calcul du discriminant :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 6^2 - 4 \times (-3) \times (-1) \\ &= 36 - 12\end{aligned}$$

$$\Delta = 24 > 0$$

donc f admet 2 racines distinctes :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-6 + \sqrt{24}}{-6} \quad \quad \quad = \frac{-6 - \sqrt{24}}{-6}\end{aligned}$$

$$x_1 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3} \quad \quad x_2 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$a = -3 < 0$ donc f est négative à l'extérieur
des racines :

x	$-\infty$	$1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$	$1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$	$+\infty$	
signe de $f(x)$	-	0	+	0	-
signe de $g'(x)$	-	0	+	0	-

de $g(x)$: - ϕ + | -

D'après la calculatrice : $1 + \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 1.81 < 2$

On a donc :

x	$1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$	2	4
Signe de $g'(x)$	+	ϕ	-

Donc, g' est strictement négative sur $[2; 4]$.

Donc, g est strictement décroissante sur $[2; 4]$.

3) La fonction est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $[2; 4]$.

$$g(2) = \ln(13) - 2 > 0 \quad (\text{on a vu en A3) que } 2 \leq \ln(13) \text{ donc } \ln(13) - 2 \geq 0)$$

$$g(4) = \ln(49) - 4 \leq 0 \quad (\text{de même}).$$

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[2; 4]$.

D'après la calculatrice,
 $\alpha(3.782) \approx 1.55 \times 10^{-4}$

Après la calculatrice,

$$g(3,782) \approx 1,55 \times 10^{-4} > 0$$

$$g(3,783) \approx -3,28 \times 10^{-4} < 0$$

Ainsi, $3,782 < \alpha < 3,783$.

Donc, $\alpha \approx 3,78$

4) D'abord, on a vu en A3) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_n \leq 4$.
Donc, $2 \leq l \leq 4$.

De plus:

- la suite (u_n) est convergente d'après A4)
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$
avec $f: x \mapsto \ln(3x^2 + 1)$

• La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car elle y est dérivable.

Donc, d'après le théorème du point fixe, l est solution de l'équation $f(x) = x$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x \Leftrightarrow \ln(3x^2 + 1) = x$
 $\Leftrightarrow \ln(3x^2 + 1) - x = 0$
 $\Leftrightarrow a(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \ln(3x+1) - x = 0$$

$$\Leftrightarrow g(x) = 0$$

Or, $l \in [2; 4]$ et d'après **B3**, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[2; 4]$.

Ainsi, $l = \alpha$.

Exercice 4:

1) a) Montrons que les points A, B et C ne sont pas alignés, c'est-à-dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

On a:

$$\overrightarrow{AB} (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (0 - 1; 3 - 2; 2 - (-1))$$

$$= (-1; 1; 3)$$

$$\overrightarrow{AC} (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A) = (-2 - 1; 4 - 2; 0 - (-1))$$

$$= (-3; 2; 1)$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles donc les points A, B et C définissent un plan.

Les points A, B, C définissent un plan.

b) Montrons que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

On a :

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 5 \times (-1) + 8 \times 1 - 1 \times 3 = 0$$

$$\text{et } \vec{n} \cdot \vec{AC} = 5 \times (-3) + 8 \times 2 - 1 \times 1 = 0$$

donc $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$

Donc, le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABC).

c) Comme $\vec{n}$ orthogonale au plan (ABC)
d'après la question précédente, une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$5x + 8y - z + d = 0$$

où d est un certain réel.

Cherchons d grâce au fait que $B \in (ABC)$.

$$\text{On a donc } 5 \times 0 + 8 \times 3 - 2 + d = 0$$

$$\text{Donc, } 22 + d = 0$$

$$\text{donc } d = -22.$$

Ainsi, une équation cartésienne du plan (ABC) est donc bien

$$5x + 8y - z - 22 = 0$$

d) Montrons que les coordonnées de D ne vérifient pas l'équation cartésienne du plan (ABC).

$$\begin{aligned} 5x_D + 8y_D - z_D - 22 &= 5 \times 8 + 8 \times 2 + 11 - 22 \\ &= 40 + 16 - 11 \\ &= 45 \end{aligned}$$

Or $45 \neq 0$.

Donc, le point D n'appartient pas au plan (ABC).

2) a) La droite Δ est orthogonale au plan (ABC) donc $\vec{m}$ est un vecteur directeur de la droite Δ car il est normal au plan (ABC) d'après la question 1) b).

De plus, la droite Δ passe par le point D, donc une représentation paramétrique de la droite Δ est :

$$\begin{cases} x = 8 + 5t \\ y = 2 + 8t \\ z = -11 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{z = -11 - t}$$

b) On cherche E tel que ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne du plan (ABC) et la représentation paramétrique de la droite Δ car il appartient à (ABC) et à Δ .

Ainsi, en notant $E(x, y, z)$, on a :

$$\begin{cases} x = 8 + 5t \\ y = 2 + 8t \\ z = -11 - t \\ 5x + 8y - 2z - 22 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 8 + 5t \\ y = 2 + 8t \\ z = -11 - t \\ 5(8 + 5t) + 8(2 + 8t) - (-11 - t) - 22 = 0 \end{cases} \quad \text{par substitution}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 8 + 5t \\ y = 2 + 8t \\ z = -11 - t \\ 90t + 45 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 8 + 5\left(-\frac{1}{2}\right) \\ y = 2 + 8\left(-\frac{1}{2}\right) \\ z = -11 + \frac{1}{2} \\ t = \frac{-45}{90} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{2} \\ y = -2 \\ z = -\frac{21}{2} \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \varepsilon = -\frac{1}{2}\bar{z}$$

On a donc bien $E\left(\frac{11}{2}; -2; -\frac{21}{2}\right)$

c)

$$\begin{aligned} \text{On a: } \overrightarrow{DE} &= (x_E - x_D; y_E - y_D; z_E - z_D) \\ &= \left(\frac{11}{2} - 8; -2 - 2; -\frac{21}{2} + 11\right) \\ &= \left(-\frac{5}{2}; -4; \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } DE &= \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + (-4)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{25}{4} + 16 + \frac{1}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{45}{2}} \end{aligned}$$

$$DE = 3\sqrt{\frac{5}{2}}$$

Donc : $DE = \frac{3\sqrt{10}}{2}$

3) a) Le premier calcul donne :

$\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u}$
où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la

où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (BC) .

Donc $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$

Donc le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal à la droite (BC) .

Grâce au deuxième calcul, on remarque que, comme le système admet une solution, le point H appartient de plus à la droite (BC) .

Ainsi, H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) .

b) On prend comme base le triangle ABC .

Calculons son aire B .

Comme, d'après la question précédente, H est le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) , on a : $B = \frac{BC \times AH}{2}$.

Le troisième calcul nous donne la valeur AH . On a : $AH = \sqrt{10}$.

Le dernier calcul donne la valeur de BC .
Donc, $BC = 3$

Ainsi : $B = \frac{3\sqrt{10}}{2}$.

Ainsi : $S = \frac{3\sqrt{10}}{2}$.

La hauteur du tétraèdre relative à la base ABC est DE car E est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).

On a, d'après la question 2)c), $DE = \frac{3\sqrt{10}}{2}$.

Donc : $V = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{10}}{2} \times \frac{3\sqrt{10}}{2}$

d'où $V = \frac{3 \times 10}{4}$

$$V = \frac{15}{2}$$