

ENSEIGNEMENT SCIENTIFIQUE
SUJET ZÉRO n°3

L'usage d'une calculatrice est autorisé.

Exercice 1 : Des instruments, des notes et des gammes (10 points sur 20)

Les instruments de musique produisent des sons auxquels l'oreille humaine associe certaines caractéristiques : hauteur, timbre et intensité. La répartition des notes dans une gamme a été retenue pour qu'elles sonnent de manière harmonieuse les unes par rapport aux autres. La recherche de cette harmonie a conduit à différents types de gammes, des gammes dites de Pythagore aux gammes tempérées.

Le sujet est composé de deux parties largement indépendantes

Partie 1 : des instruments et des notes

Les cordes d'un piano vibrent lorsqu'elles sont frappées par de petits marteaux actionnés par les touches du clavier. Les sons produits par le piano résultent de ces vibrations.

Document 1 : notes associées aux touches d'un piano pour l'octave Do3 - Do4 et fréquences associées en hertz (Hz)

	Do# 278	Ré# 312		Fa# 371	Sol# 416	La# 467	
Do3 262	Ré 294	Mi 330	Fa 350	Sol 393	La 441	Si 495	Do 524

- 1- Calculer la fréquence associée au La4 située une octave au dessus du La3.
- 2- On s'intéresse aux sons produits par ce piano. Un système d'acquisition informatisé permet l'enregistrement et la visualisation des signaux associés à ces sons.

Document 2 : signaux enregistrés correspondant à des notes de musique jouées par un piano

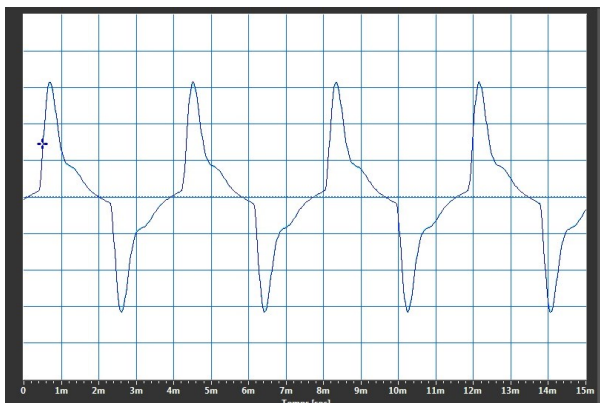


Figure 1

Signal sonore en fonction du temps. Une graduation horizontale correspond à 1,0 ms.

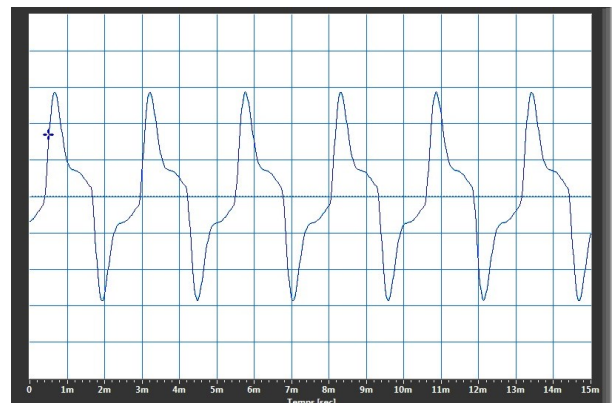


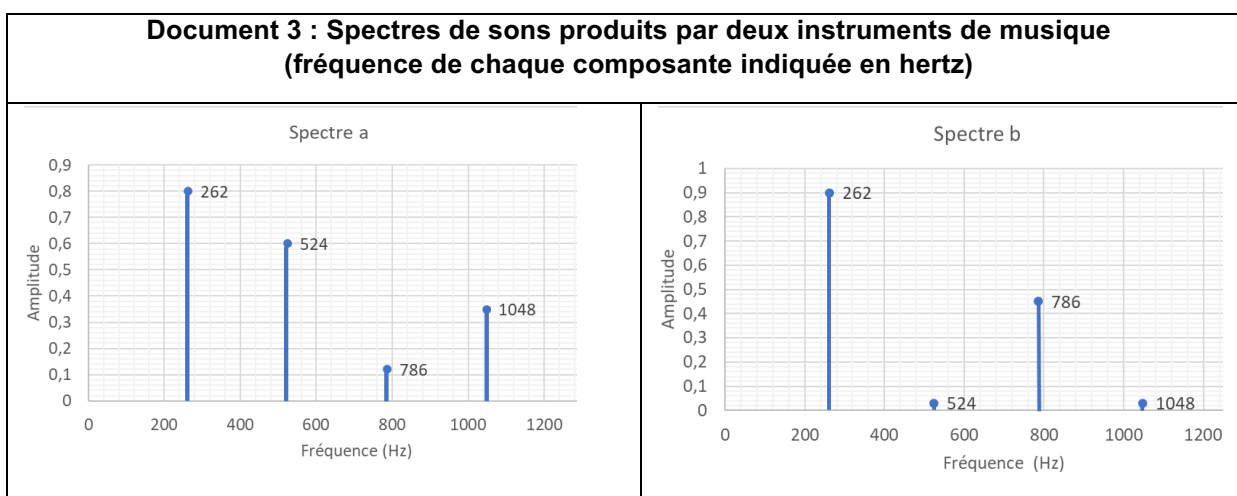
Figure 2

Signal sonore en fonction du temps. Une graduation horizontale correspond à 1,0 ms.

2-a- Justifier que les figures 1 et 2 correspondent à deux notes différentes.

2-b- Identifier les notes correspondantes aux figures 1 et 2.

3- L'analyse spectrale permet, après une acquisition informatisée et un traitement numérique, de révéler la « signature acoustique » d'un son en faisant apparaître l'amplitude de ses différentes composantes en fréquence.



3-a- Ces deux sons ont-ils la même hauteur ? L'oreille humaine peut-elle les différencier ?

3-b- Le spectre a correspond à l'un des sons produit par un piano étudiés dans la question 2. Associer ce spectre à l'un des deux signaux du document 2.

Partie 2 : des notes et des gammes

La théorie musicale étant fondée sur des rapports de fréquences, on décide de simplifier les calculs en attribuant la valeur 1 (sans unité) à une fréquence choisie comme référence. Celle-ci correspond à une note de référence (par exemple 262 Hz pour le Do 3). On retrouve ensuite les fréquences réelles en multipliant les valeurs calculées par la fréquence de la note de référence.

La construction des gammes dites de Pythagore est basée sur le cycle des quintes : on part de la fréquence de valeur $f_0 = 1$. On construit une nouvelle fréquence, la quinte, en multipliant f_0 par $\frac{3}{2}$. On réitère ce processus pour obtenir la quinte de la quinte, et ainsi de suite. À certaines étapes, le fait de multiplier par $\frac{3}{2}$ une fréquence f comprise entre 1 et 2 peut donner une fréquence supérieure ou égale à 2. On se propose de démontrer que, si on divise par 2 la valeur obtenue, on la ramène dans l'octave.

4- On suppose que $1 \leq f < 2$ et on raisonne par disjonction de cas :

- premier cas : $1 \leq f < \frac{4}{3}$. Montrer que $1 \leq \frac{3}{2} \times f < 2$
- deuxième cas : $\frac{4}{3} \leq f < 2$. Montrer que $2 \leq \frac{3}{2} \times f$ et $1 \leq \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} f < 2$

5- L'algorithme suivant permet de calculer les fréquences des notes successivement obtenues par ce processus jusqu'à ce qu'on retombe sur la fréquence initiale.

```

 $f \leftarrow 1$ 
 $f \leftarrow \frac{3}{2} \times f$ 
 $n \leftarrow 1$ 
Tant que  $f \neq 1$  faire
     $n \leftarrow n + 1$ 
     $f \leftarrow f \times \frac{3}{2}$ 

    Si  $f \geq 2$  alors  $f \leftarrow f \times \frac{1}{2}$ 

Fin Si
Fin Tant que
    
```

Recopier et compléter le tableau ci-dessous en donnant les valeurs des 12 premières quintes obtenues par cet algorithme. Les résultats seront donnés d'abord sous forme exacte comme quotients d'une puissance de 2 par une puissance de 3, puis par leurs valeurs décimales approchées au centième obtenues à l'aide de la calculatrice.

Numéro de la note	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Fréquence (fraction irréductible)	1	$\frac{3}{2}$				$\frac{3^5}{2^7}$	$\frac{3^6}{2^9}$	$\frac{3^7}{2^{11}}$		$\frac{3^9}{2^{14}}$	$\frac{3^{10}}{2^{15}}$	$\frac{3^{11}}{2^{17}}$	$\frac{3^{12}}{2^{19}}$
Fréquence (valeur approchée à 10^{-2} près)	1	1,5				1,9	1,42	1,07		1,20	1,80	1,35	1,01

6- L'algorithme termine-t-il pour une valeur de n inférieure ou égale à 12 ?

7- Chacune des fréquences calculées est obtenue à partir de 1 par des multiplications successives par $\frac{3}{2}$ et éventuellement par $\frac{1}{2}$. Elles peuvent donc toutes s'écrire sous la forme $\frac{3^m}{2^n}$ où m et n sont des entiers non nuls.

7-a- Démontrer que l'égalité $\frac{3^m}{2^n} = 1$ est impossible.

7-b- Que peut-on en déduire pour l'algorithme proposé ci-dessus ?

8- D'après ce qui précède, le cycle des quintes ne « reboucle » jamais exactement sur la note de départ. En s'appuyant sur le tableau de la question 5, justifier le choix de 12 notes dans une gamme construite selon ce principe.

Exercice 2 : La sphéricité de la Terre (10 points sur 20)

Les Grecs de l'Antiquité attribuaient déjà à la Terre une forme sphérique et Ératosthène (276-194 av JC) fut le premier à en calculer la circonférence. Dans tout ce qui suit, la Terre est assimilée à une sphère de rayon 6371 km.

Partie 1. Repérage sur la sphère terrestre

Afin de se repérer à la surface de la sphère terrestre, on utilise des coordonnées géographiques (longitude, latitude).

Ville	Pays	Longitude	Latitude
Libreville	Gabon	9° Est	0°
Quito	Équateur	79° Ouest	0°
Toronto	Canada	79° Ouest	44° Nord
Toulouse	France	1° Est	44° Nord

Questions :

1- Calculer la longueur d'un méridien terrestre.

2- À partir des informations du tableau ci-dessus

2-a- Indiquer les villes qui sont situées sur un même méridien.

2-b- Indiquer les villes qui sont situées sur un même parallèle.

3- On note O le centre de la Terre et T, Q et T' les villes Toronto, Quito et Toulouse. On note I le centre du parallèle passant par Toronto et Toulouse. Sur le schéma ci-dessous (figure 1a) représentant la sphère terrestre, on a placé les points O, I, Q, T et T'.

Document 1 : Représentations graphiques permettant un repérage spatial sur la sphère

Figure 1a. Sphère terrestre

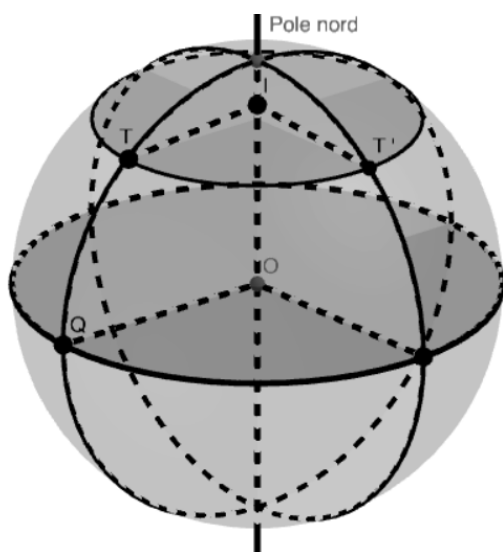
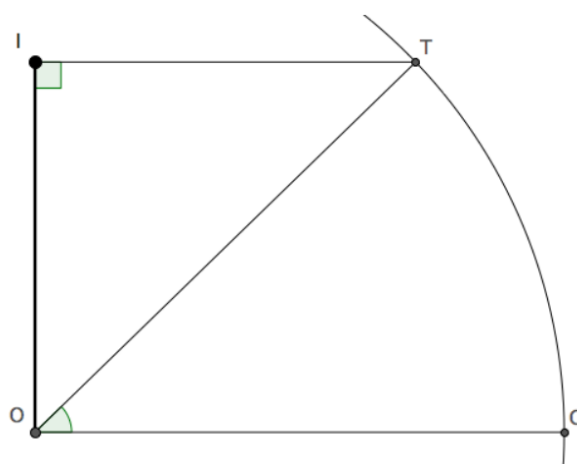


Figure 1b. Plan contenant l'axe des pôles et le point T



3-a- Donner la mesure, en degré, des angles QOT et TIT'.

3-b- Calculer la longueur de la portion de méridien reliant Quito à Toronto.

4- À l'aide de la figure 1b :

4-a- Préciser la longueur OT puis calculer la longueur IT.

4-b- En déduire la longueur du parallèle passant par Toulouse et Toronto.

4-c- Justifier, par un calcul, que la longueur de la portion de parallèle reliant Toulouse à Toronto est environ égale à 6399 km.

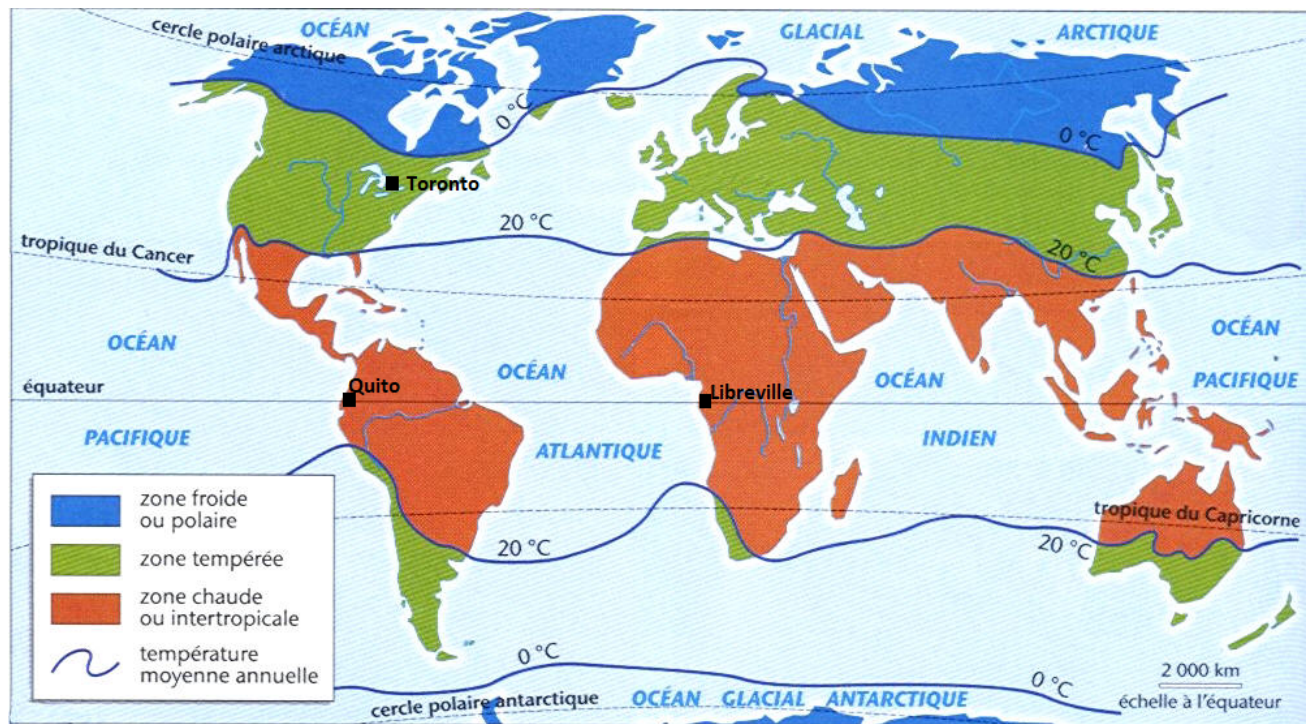
5- Un système d'information géographique (SIG) donne les informations suivantes :

- Distance Quito - Toronto : 4891 km
- Distance Toulouse - Toronto : 6230 km.
- Pour un système d'information géographique, la distance entre deux points du globe est le plus court chemin qui les relie à la surface de la Terre.

Expliquer pourquoi les longueurs données par le SIG et celles calculées dans les questions 3 et 4 sont, dans un cas, très proches alors que, dans l'autre, elles ne le sont pas.

Partie 2 : les différents climats de la Terre

Document de référence : Les zones climatiques à la surface de la Terre



Source : <http://planete-terre.tripod.com/zontherm.htm>

Sur cette carte, on constate que Quito et Libreville, qui sont à la même latitude, sont dans une zone chaude intertropicale. Pour Toronto, situé à la même longitude que Quito, la température moyenne annuelle est plus froide.

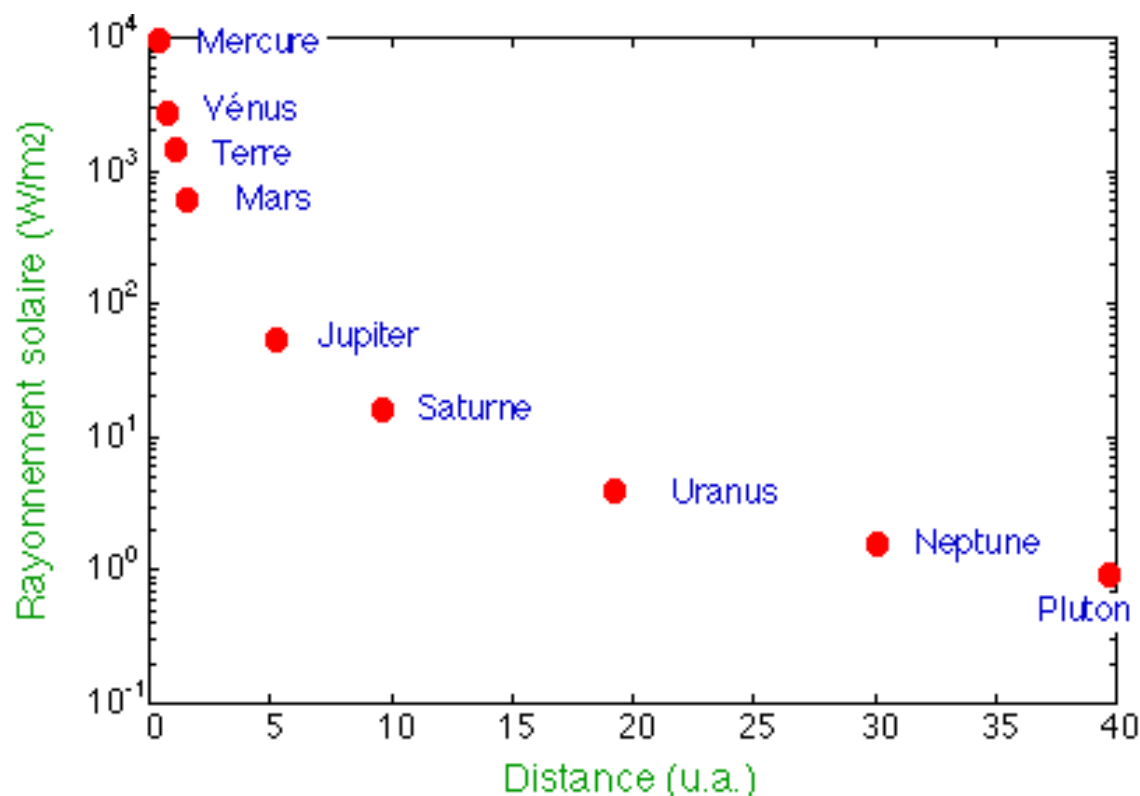
Afin d'expliquer ces différences climatiques, un élève a proposé comme hypothèse :

« Il fait plus chaud à l'équateur qu'aux pôles parce que La Terre est plus proche du Soleil à l'équateur qu'aux pôles ».

6- À partir des connaissances acquises et des informations issues des documents 3 et 4, rédiger un paragraphe argumenté permettant à la fois d'expliquer qu'il fait plus chaud à l'équateur qu'aux pôles et d'invalider l'hypothèse émise par cet élève.

La justification des arguments pourra s'appuyer sur des schémas explicatifs.

Document 3 : Puissance solaire reçue en fonction de la distance au Soleil (en unités astronomiques u.a. 1u.a. = $1,5 \times 10^8$ km)



Source : <http://planet-terre.ens-lyon.fr/article/explication-temperature.xml>

Document 4 : Puissance solaire reçue par unité de surface en fonction de la latitude



Résultat observé pour un même éclairage de l'équateur (à gauche) et des pôles (à droite)

latitude	0°	45° nord	60° nord	89° nord
Pays, régions, villes correspondant à la latitude	Equateur, Brésil, Kenya	Bordeaux	Oslo, St Pétersbourg	Pôle nord
Surface recevant une même quantité d'énergie (m²)	1	1,4	2	57
Puissance solaire reçue en moyenne par unité de surface (W / m²)	420	$420 \times 1 / 1,4 = 300$	$420 \times 1 / 2 = 210$	$420 \times 1 / 57 = 7,36$

Tableau de correspondance entre la latitude et l'énergie solaire reçue par unité de surface

Source : D'après <http://www.ac-grenoble.fr/armorin.crest/>